統計学

序

今日ノ統計学 statistics ハ百年前ノ天文学者ニシテ数学者タル Quételet (1796-1874) ニ初マルト云ヒテ可ナラン. 今日ニテハ三派アリ.

I. 経済学ノ方面

Bertillon, Bowley, Hooker

II. 生物統計, 遺伝学, 実験心理学ノ方面.

Galton, Pearson, ~~Davenport~~, Yule, Spearman, ~~Thorndike, Brown~~.

III. 数学ノ方面 Lexis ドイツ

Bruns 独, Czuber 墺, Charlier 瑞典, A. Fisher アメリカ

私ハ主ニ第二ヲ主トシ傍ラ第一ヲ加ヘテ編纂セシ.

初等的 King, Elements of statistical method. New York 1916.

Bowley, Elements of statistics. London. 1917.

|| Yule, Theory of statistics. London.

森数樹, 一般統計論. 丸善.

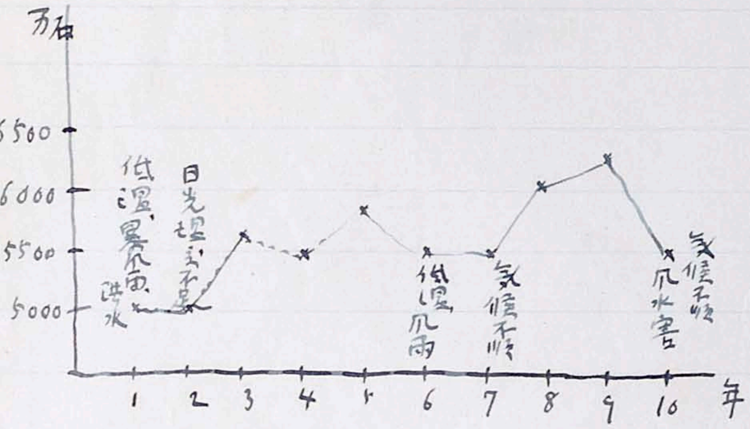
Johannsen, Elemente der Exakten Erblichkeitslehre.

Jones, statistics.

Kapitel IV. graphische Methode

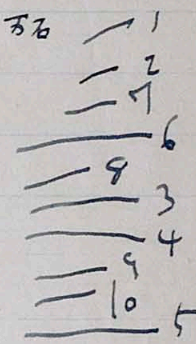
第一章 「グラフ」ニヨル方法. graphical method.

1. グラフ. 統計ニ就テハ 只ダ数字ヲ羅列スルヨリモ, ~~図~~ 曲線ヲ以テ顕ハス方ガ, 一見瞭然タラシムルノミナラズ, マタ之ニ依テ大勢ヲ知ル上ニ於テモ ~~[illegible]~~ ヨシ、マタ之ニ依テ変化ノ原因ヲ発見セシムルコトアリ.

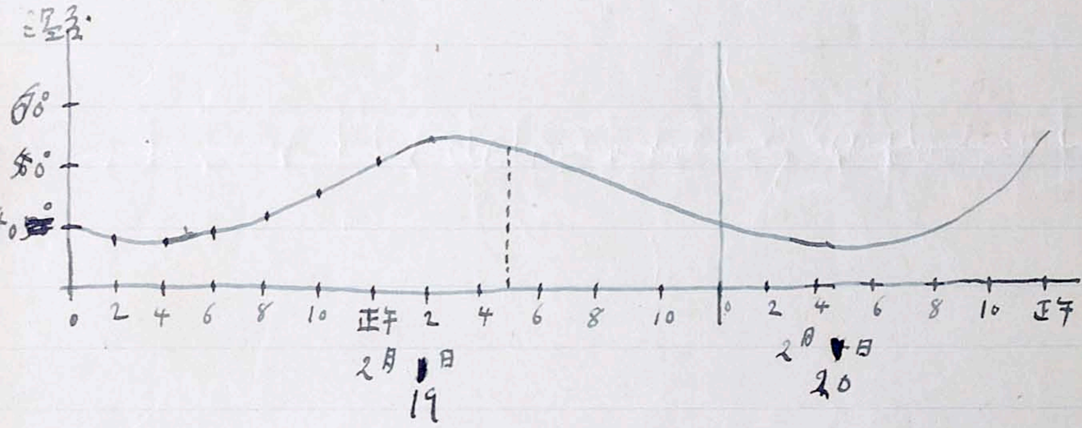


例1. 我ガ邦ノ米ノ産額.

大正	
1	5022 万石
2	5026
3	5701
4	5593
5	5844
6	5456
7	5470
8	6082
9	6318
10	5518



例2. (連続的)



連続的変化ノ場合ニハ 挿入法(補間法) interpolation ガ出来ル.

2. 変化率 rate of change.

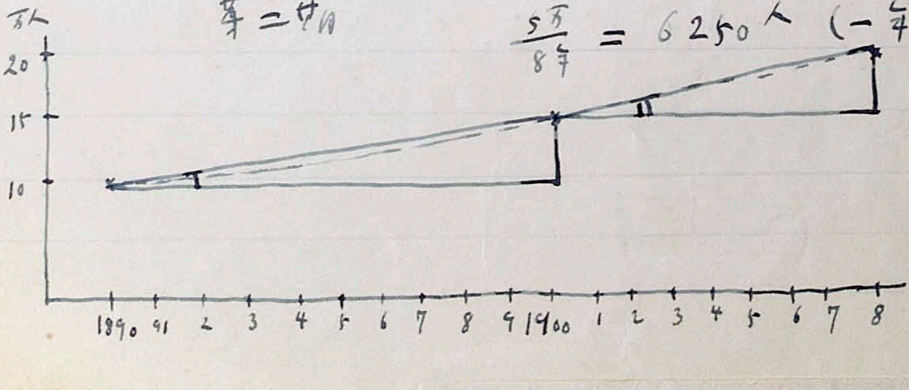
或ル市ノ人口統計ニ就テ

1890	10万人	
1900	15	
1908	20	

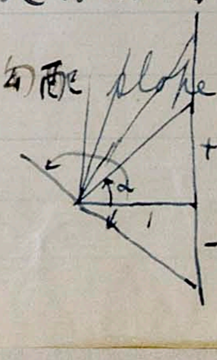
ヨリ見ルトキハ, 1890年ヨリ 1900年マデノ間ニ 5万人
1900 1908 5万人
増加セリ. 即チ二期間ノ絶対的増加 absolute increase ハ同一ナリ. 然レドモ其ノ増加率即チ増加ノ速サ rate ハ

第一期 $\frac{5万}{10年} = 5000$人 (一年ニ)
第二期 $\frac{5万}{8年} = 6250$人 (一年ニ)

absolute rate of change 絶対的増加率.



勾配 slope.



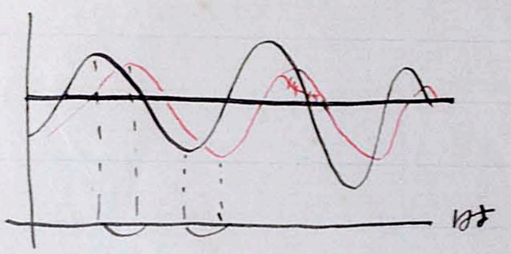
正切 tgα.

α	$0°$	$10°$	$20°$	30	40	45
$\tan\alpha$	0	$0{,}176$	$0{,}364$	$0{,}577$	$0{,}839$	1

$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
1.19	1.73	2.75	5.67	∞

$100°$	$110°$	$120°$	$130°$
-5.67	-2.75	-1.73	-1.19 ...

注意。　原因ヨリ結果ヲ生ズルトキ, 時ノ遅レ time lag ヲ来スコトアリ.



ソノ場合ニハ時ヲズラセテ correlat~ヲ考フルヲ至当トス.

以上ノ方法ハ勿論 ~~正確~~ ~~精密~~ 粗雑ニシテ正確ナルモノニハアラズ; モット比較的正確ナル方法ハ Bowley, p.375 ニアリ.

~~Kapitel III.~~

Statistik.

~~Kapitel I.~~ 第二章

分配表

Verteilung (frequency-distribution) 度數分布. 頻度.

6. ~~I.~~ Verteilungstafel (frequency-table. 度数分布表 ~~[illegible]~~ 分配曲線. 頻度表. 個人差ノ問題

小学児童ノ重サ gr. 単位. (2880名)
(男子)

重サ	平均	人数
1850-1950	1900	10
1950-2050	2000	1,5
2050-2150	2100	2,5
2150-2250	2200	30
2250-2350	2300	4,5
2350-2450	2400	1,5
2450-2550	2500	30
2550-2650	2600	80
2650-2750	2700	140
2750-2850	2800	14,5
2850-2950	2900	140
2950-3050	3000	170
3050-3150	3100	260
3150-3250	3200	30,5
3250-3350	3300	28,5
3350-3450	3400	23,5
3450-3550	3500	180
3550-3650	3600	18,5
3650-3750	3700	13,5
3750-3850	3800	130
3850-3950	3900	60
3950-4050	4000	40
4050-4150	4100	50
4150-4250	4200	6,5
4250-4350	4300	3,5
4350-4450	4400	2,5
4450-4550	4500	0,5
4550-4650	4600	30
4650-4750	4700	10
		2880

100 gr. ノ差デ分ケルト Verteilung ノ Schwankung ガ甚ダシ.

コノ Schwankung ヲ除クタメニ 200 gr. 又ハ更ニ モ同様, 例ヘ 300 gr. ノ差デ分ケル.

重サ	平均	人数
1850-2150	2000	50
2150-2450	2300	90
2450-2750	2600	250
2750-3050	2900	45,5
3050-3350	3200	850
3350-3650	3500	600
3650-3950	3800	32,5
3950-4250	4100	15,5
4250-4550	4400	6,5
4550-4850	4700	40
		2880

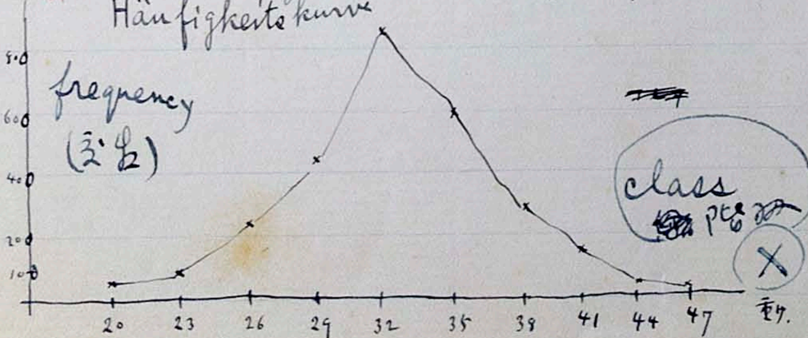
若シ区間ヲ余リ大キク取ラバ分配ノ要ヲナサズ.

斯クノ如ク区間ノ大サヲ適当ニ撰ブコトヲ要ス.
之ヲ reduzierte Verteilungstafel トイフ.

分配曲線
度数曲線
頻度曲線

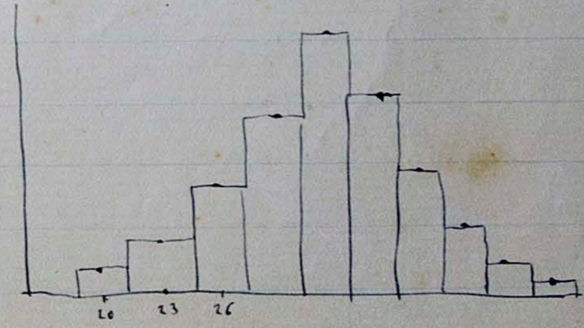
2. ~~II.~~ Verteilungskurve (frequency-curve)

Häufigkeitskurve



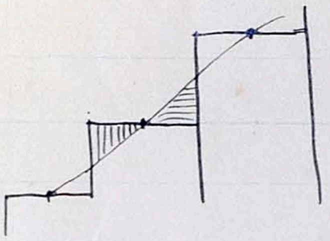
Verteilungspolygon

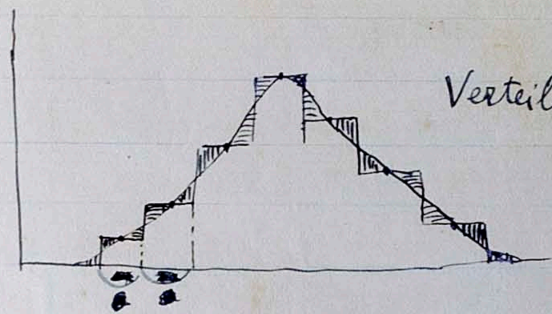
白耳義 Quételet (1844)



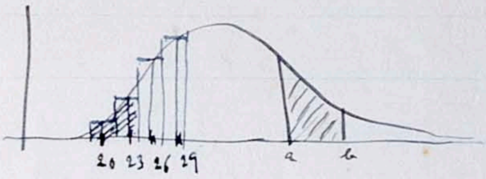
Staffenbild (Histogram)

生物学ニ於テハ之ヲ Variationskurve (統計曲線)





Verteilungs Kurve.



ソノ面積ハ a ト b トノ間ニ含マレル モノノ数ニ比例ス.

$$[A]_a^b = [N]_a^b$$

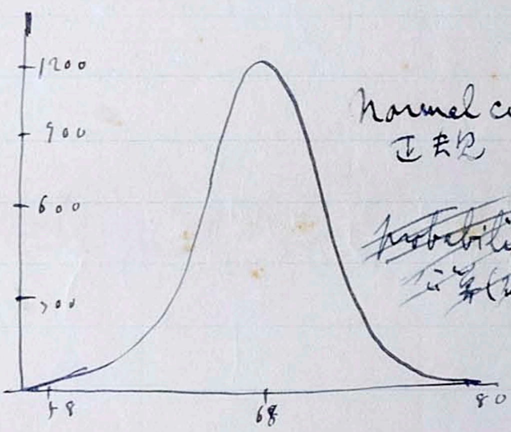
変差曲線ノ分類

7 III. Klassifikation d. Verteilungen.

I. Symmetrische V. (對稱的)

英国人ノ背ノ高サ

高サ (inch)	人数
57-58	2
58-59	4
59-	14
60-	41
61-	83
62-	169
63-	394
64-	669
65-	990
66-	1223
67-	1329
68-	1230
69-	1063
70-	646
71-	392
72-	202
73-	79
74-	32
75-	16
76-	5
77-	2
	8585



Normal curve
正規

~~Probability curve~~
~~公算(確率)~~

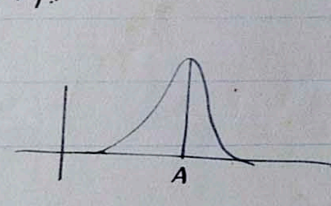
6個ノ銭ヲ64回振ル.

表ノ数	回数
6	1
5	6
4	15
3	20
2	15
1	6
0	1

若シコレガ相稱的ニ symmetrische ナラバ

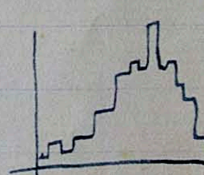
$$y = \frac{N . h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-A)^2}$$

トナルベキ筈ナリ.



Nハ面積ナル. $N = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx.$

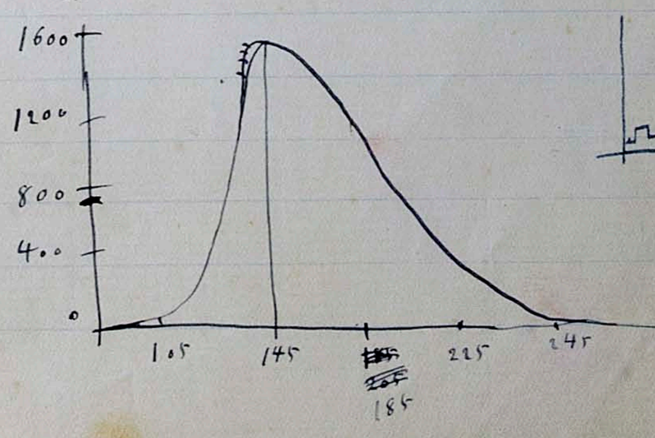
10 cmノ長サヲ書カセシ際
N=153.



II. asymmetrische V.

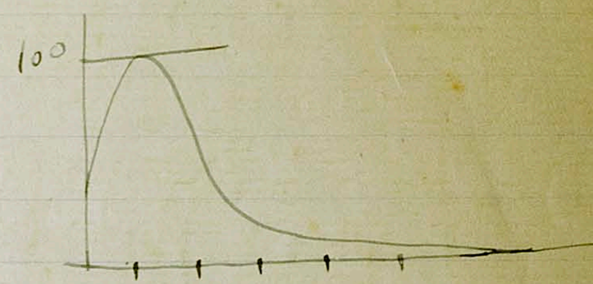
英国人ノ重サ

7749人



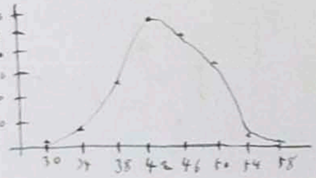
英国

100人ニ対スル受ケル人数	~~地方表~~ 平均	地方ノ数
0.75-1.25	1.0	18
1.25-1.75	1.5	48
1.75-2.25	2.0	72
2.25-2.75	2.5	89
2.75-3.25	3.0	100
3.25-3.75	3.5	95
3.75-4.25	~~3.75~~ 4.0	75
4.25-4.75	4.5	60
4.75-5.25	5	40
5.25-~~6.25~~ 5.75	5.5	21
5.75-6.25	6	11
6.25-6.75	6.5	5
6.75-7.25	7	1
7.25-7.75	7.5	1
7.75-8.25	8.0	0
8.25-8.75	8.5	1
		632



185 個 1 長サ 1 Variation 試験

長サ cm	数
	2
30	7
34	28
38	59
42	49
46	33
50	6
54	1
58	



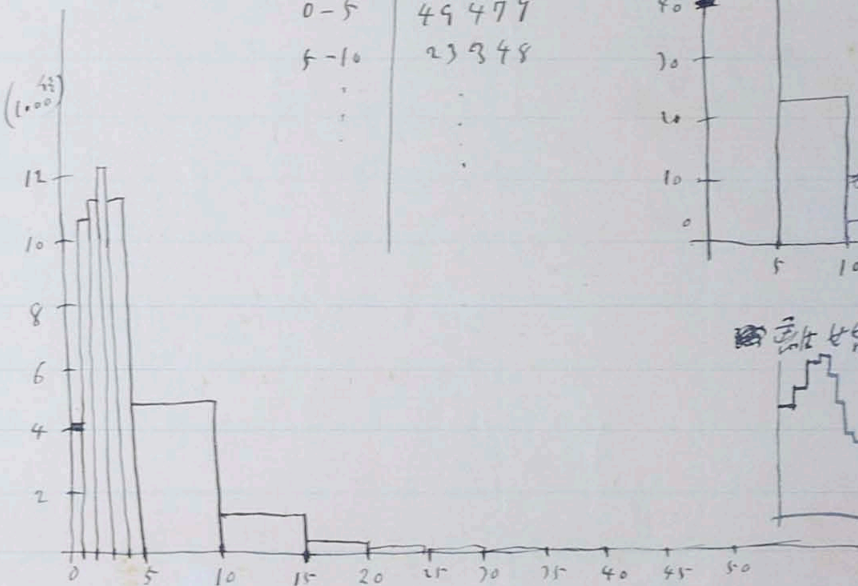
III. einseitige V.

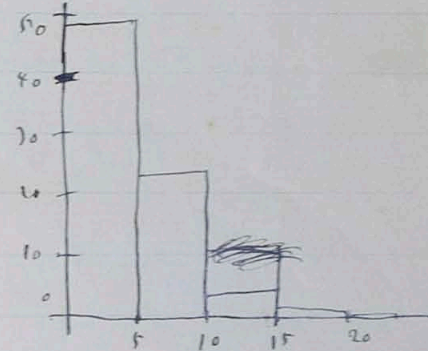
(一方ニ偏スル場合)

Diphtherie デ 死ヌ人.

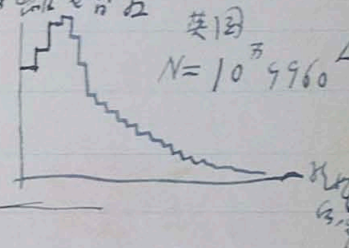
年齢	死者
0 – 1	4186
1 – 2	10491
2 –	11218
3 –	12390
4 –	11194
5 – 10	23348
10 – 15	4092
15 – 20	1123
20 – 25	585
25 – 35	786
35 – 45	512
45 – 55	324
55 – 65	260
65 – 75	127
75 –	35
	80671

0 – 5	49479
5 – 10	23348
⋮	⋮





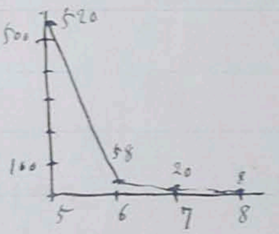
結婚者



梅ノ一種 高麗(コーライ)

~~Prunus Mume~~

ノ花瓣ノ数 (600ノ中)

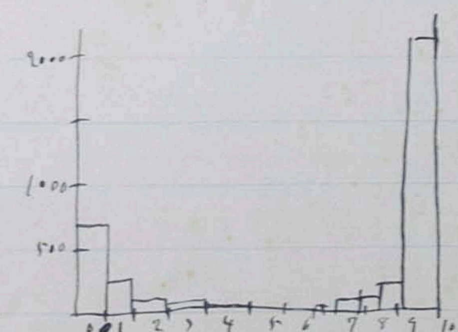


植物ノ趨異 (Variation)

IV. U-Vert.

Breslau デ 1876–85 年間 均シタ雲ノ量

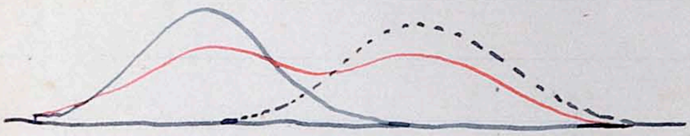
雲	日数
0	751
1	179
2	107
3	69
4	46
5	9
6	21
7	71
8	194
9	117
10	2089
	3653

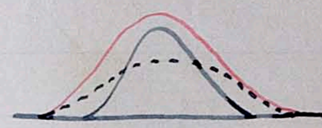


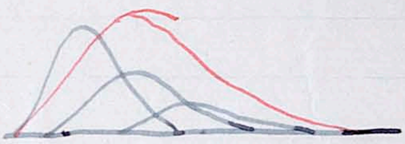
Galton ノ研究. 親ノ中ニテ少シトモ一人唖者ヲ出セル家族

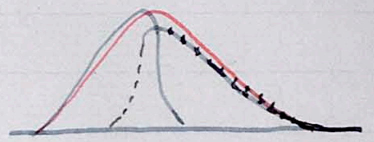
唖者 %	家族ノ数
0 – 20	220
20 – 40	20,5
40 – 60	12
60 – 80	5,5
80 – 100	15
	273

V. 進化 … De Vries ノ研究

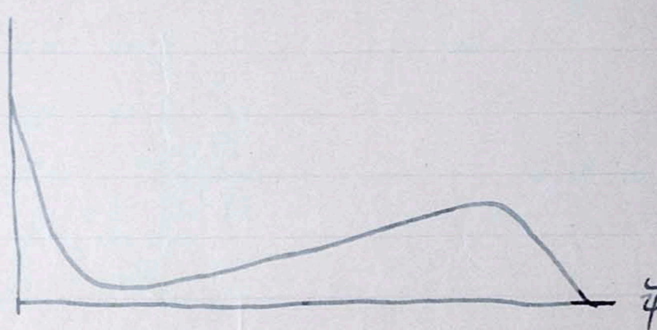








死亡率



Elderton, Frequency-curves.

第三章 平均値 ~~mean~~ (averge)

散布度 Measure of dispersion.

8. 算術平均 arithmetical mean, Mode (最濃値), Median (中央値).

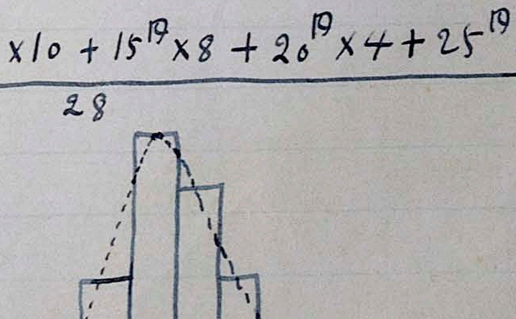
金	人
5円	4
10	10
15	8
20	4
25	2
	28

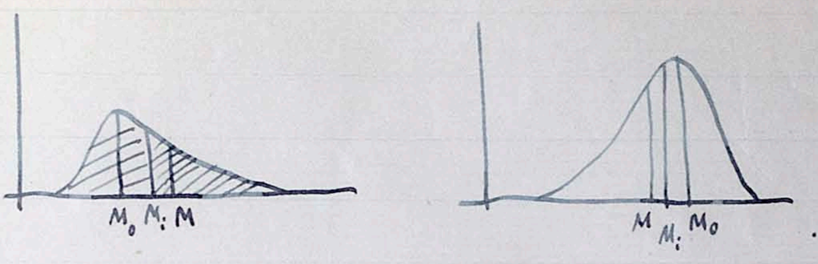
$$M = \frac{5^{円}\times 4 + 10^{円}\times 10 + 15^{円}\times 8 + 20^{円}\times 4 + 25^{円}\times 2}{28} = \frac{370^{円}}{28}$$

$$= 13^{円},21^{銭}\ldots$$

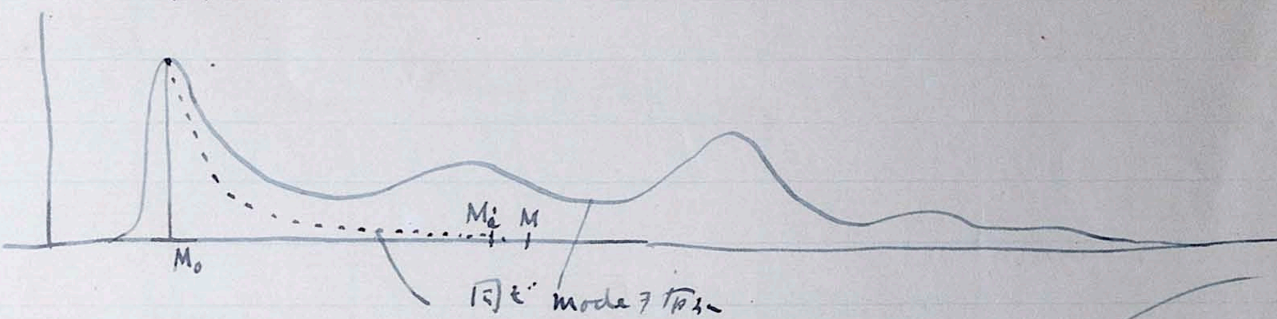
$M_0 = 10^{円}$

$M_i = 12^{円},50^{銭}$





M_0 ハソノ近傍ニテ定マル



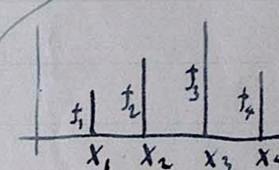
M ハ 平均ヲ外レタ ~~意外~~ モノニモ大ナル関係アリ.

0円	100人
10	200
20	100
百万円	1

M = 2500円 ナリ.

$M_0 = 10$円

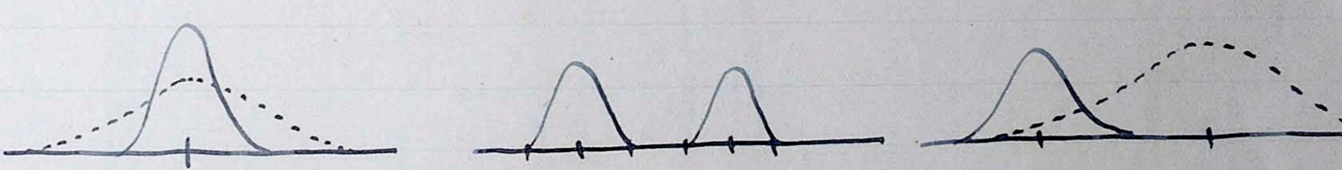
$M_i =$ 約 10円.



$$M = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f x}{N}$$

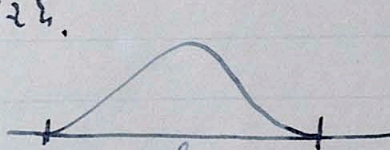
X ノ平均 (算術)

9. Measure of dispersion. 散布度



散布度ヲハカル種々ノ方法.

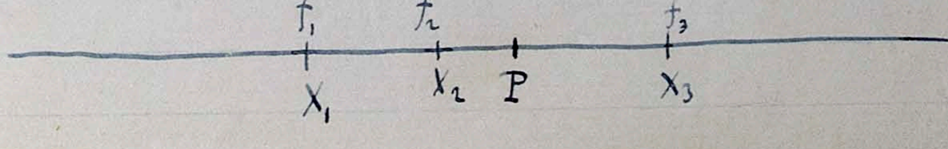
I. 分布範囲



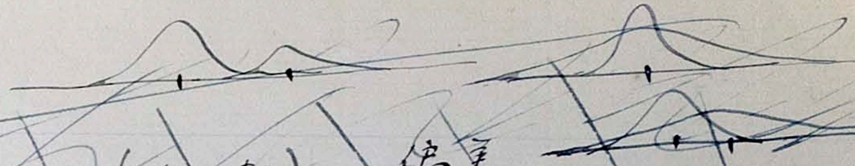
コレハ大部分ノモノヲ無視スル
平均ノ値ナリ

~~II. ...~~ 一点ヨリノ偏差ノ偏差度ヲ取ル
総和

$$\sqrt{\frac{\Sigma f_i (P-X_i)^2}{N}}$$ ヲ比ベテ.



コレガコノ値ノ最小ナルハ P ガ算術平均ナル時ナリ.

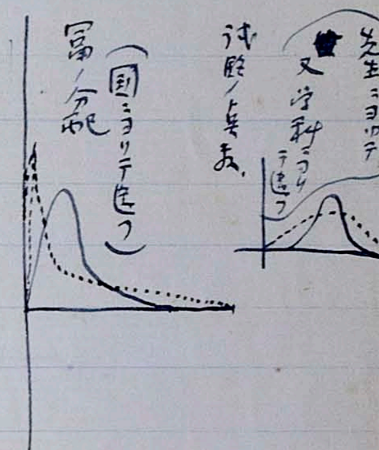


~~2. III. Abweichung (deviation) 偏差~~

~~Verteilungskurve ハ 趨異ノ模様アルイ typus 型ヲ表ハシテ居ル。~~
~~アルイ 趨異ヲ表ハス 数ヲ表ハスノミ、趨異ノ程度ヲ(含ム)数ガ必要デアル~~
~~ソノ為メニハ 平均 モツノーナヲデキモ コレデハ不十分。~~

I. 趨異ノ両端ノ距離 アルイ其ノ範囲 Variationsweite (range)

又ハ 趨異幅 モ、ソノーナヲニモ、 大部分ノ点モ、中間ハ全ク無視ス。



II. 今 Abweichung (deviation) 偏差 $z_1 = X_1 - M$, $z_2 = X_2 - M$, $z_n = X_n - M$

ストナ平均値 M トノ差ヲ 各 class ノ 全部ノ偏差ノ計ニ

ト分ク。Pearson ハ 最モ適当ナル作モテ

Standard abweichung (Standard deviation) 標準偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(f_k z_k^2)}$$

何故？

ヲ採用セリ。 職工ノ実ノ場合ニハ

$\sigma = 0$ ナルハ $z_1 = z_2 = \cdots = 0$.

一日ニ仕上ゲル 番数	x_k	f_k	z_k	z_k^2	$f_k z_k^2$
	30	2	−14	196	392
	34	7	−10	100	700
	38	28	−6	36	1008
	42	59	−2	4	238
	46	49	+2	4	196
	50	33	+6	36	1188
	54	6	+10	100	600
	58	1	+14	196	196
		$N=185$			4516

$M = 43.92 \doteqdot 44$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4516}{185}} = \sqrt{24.4} \doteqdot 4.9$$

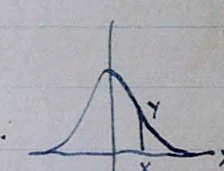
両端ヲ除クハ $\sigma \doteqdot 4$

Normal Kurve ニ就テハ

~~Praezisionsmass h ハ~~

$$h = \sqrt{\frac{N}{2\,\Sigma(f_k z_k^2)}}$$

故ニ $h^2 = \frac{1}{2\sigma}$



$$y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$e = 2.718$

III. Variationskoefficient 趨異係数 $v = \frac{100\,\sigma}{M}$

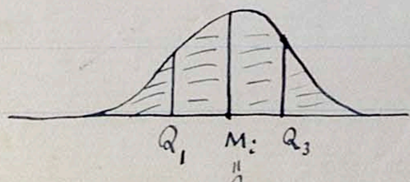
~~6. Mittlere Abweichung (mean deviation)~~

くるみノ実ニ就テハ $v = \frac{100 \times 4.9}{44} = 11.1$

Quartile Abweichung 四分位偏差 ~~und Schiefe 歪度~~

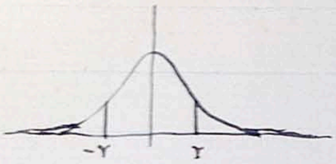
IV. Galton

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$



Galton ハ全体ヲ取ラズシテ
実ニ $Q_1 Q_3$ 间ヲトリテ、
比較スルヲ方ナト主張セリ

Normal Kurve ニ於テハ



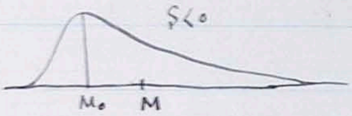
$$Q = \frac{r-(-r)}{2} = r$$

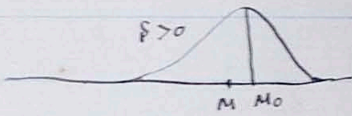
r ハ wahrscheinliche Fehler (probable error) ナリ.

V. Schiefe der Verteilung (Skewness) 歪度 (コレハ非對稱ノ度合ヲ定ムルモノ)

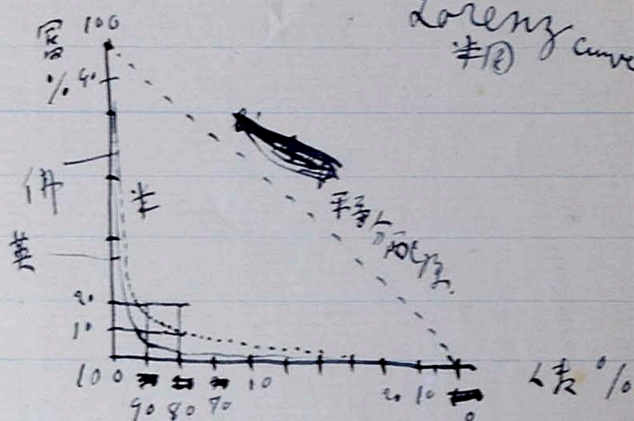
Pearson

$$S = \frac{M - M_0}{\sigma}$$





ローレンツ Lorenz curve



標準偏差ヲ計算スル便法

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum (f_k \xi_k^2)$$

$$\xi_k = X_k - M.$$

今 $\delta_k = X_k - A$ A ハ M ノ近傍ニ於ケル任意ノ数.

トオク.

$$\delta_k = (\xi_k + M) - A$$

$$= \xi_k + (M-A)$$

$$= \xi_k + d.$$

$M-A=d$ トオク

$$\delta_k^2 = \xi_k^2 + 2d\,\xi_k + d^2.$$

$$\sum f_k \delta_k^2 = \sum f_k \xi_k^2 + 2d \sum f_k \xi_k + d^2 \sum f_k$$

$$= \sum f_k \xi_k^2 + N d^2.$$

$$\sum f_k \xi_k = \sum f_k (X_k - M)$$

$$= \sum f_k X_k - M \sum f_k$$

$$= \sum f_k X_k - N \cdot M$$

$$= 0.$$

故ニ

$$\sum f_k \xi_k^2 = \sum f_k \delta_k^2 - N d^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_k \delta_k^2}{N} - d^2.$$

便宜計算 A=3.5トオク

X	f	δ (仮ニ 0.5ヲ1トス)	fδ² (仮ニ 0.5×0.5ヲ1トス)
1	18	−5	450
1.5	48	−4	768
2	72	−3	648
2.5	89	−2	356
3	100	−1	100
3.5	90	0	0
4	75	+1	75
4.5	60	+2	240
5	40	+3	360
5.5	21	+4	336
6	11	+5	275
6.5	5	+6	180
7	1	+7	49
7.5	1	+8	64
8	0	+10	100
			4001

$$\frac{\sum f_k \delta_k^2}{N} = \frac{4001}{632} \times (0.5)^2$$

$$d = M - 3.5 = 3.29 - 3.5$$

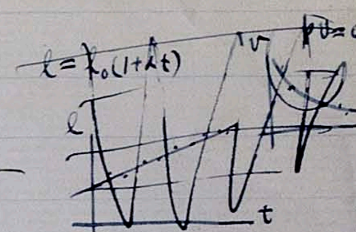
$$\sigma^2 = \frac{4001}{632} \times (0.5)^2 - (3.29 - 3.5)^2$$

$$\sigma = 1.24 \ \%$$

第四章 相関.

~~Kapitel III~~

~~Korrelation (correlation 相関)~~



11 ~~II.~~ Korrelationstabelle. Correlation-table 相関表.

~~二ツノ変数ノ間ニアル関係ニ二種アリ. Abhängigkeit~~

~~I. 函数的 funktionelle Abh. II. 相関的 (Korrelative)~~

Korrelat. ヲ見ルニ先ヅ Korrelationstabelle ヲ作ル.

英国 531万7520 家族ノ調査

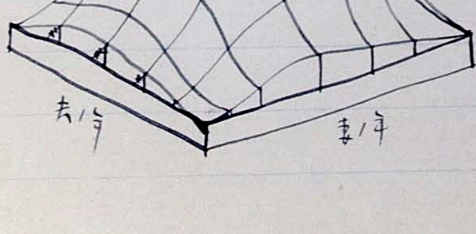
	妻ノ年齢															
	15-	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	55-	60-	65-	70-	75-	80-	85-	合計
夫ノ年齢 15-	2	2														4
20-	16	173	46	4	1											240
25-	4	185	402	84	10	2	1									688
30-	1	41	265	411	84	12	2	1								817
35-		9	69	251	369	80	12	2	1							793
40-		3	17	71	219	309	66	12	2	1						700
45-		1	6	20	66	178	252	59	10	2	1					595
50-			2	8	19	57	146	195	44	10	2					483
55-			1	3	8	18	46	110	141	35	6	1				369
60-				1	3	8	16	39	81	101	23	4	1			277
65-				1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1		175
70-					1	1	2	5	8	18	31	31	6	1		104
75-						1	1	2	3	5	10	14	12	2		50
80-								1	1	1	2	4	5	3	1	18
85-											1	1	1	1		4
合計	23	414	808	854	781	669	550	437	317	226	134	68	27	8	1	5317

コノ表ニヨレバ夫婦ノ年齢ニ一ツノ関係アルヲ見ル. 即チ若イ人ハ若イ人ト, 老人ハ老人ト對スル.

式ハ曲面ニヨッテ

Verteilungsfläche

(Frequency-surface)



母ト娘ノ生ルル子供ノ数.　（各ノ母ヨリ:ベ一人ノ娘ヲ選ブ: 皆結婚后15年マデトル）.

	母ノ子供ノ数 X 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	合計
娘ノ生ム子供ノ数 Y 0	5	9	11	18	21	15	8	9	6	3	2	3					110
1	12	5	14	15	10	13	9	8	5	3	2	2					98
2	9	9	10	15	18	15	9	3	2	4	2					1	97
3	5	10	16	11	9	14	13	10	4	8	2	3					105
4	5	5	19	17	21	15	18	10	14	2	1	5	1				133
5	7	6	7	17	23	9	12	13	14	8	3	2	2				123
6	4	5	8	11	15	12	15	14	7	5	3	3	1				103
7	5	4	3	8	4	13	9	8	5	10	2	1	1				73
8	1	2	4	12	9	9	8	5	12	3	4	1	2	1			73
9			4	3	3	4	7	5	3	2	2	1					34
10			1	2	1	3	4	6	3	2		1		1			24
11			2	1	1	1			1	2							8
12		2	1	2	3		1	1			1		1		1		13
13					2	1					1		2				6
合計 $g^{(x)}$	53	57	100	132	140	124	113	92	76	52	25	22	10	2	1	1	1000

コレハ大分不規則ナリ.

12 §. 8. Mittelwerte (mean 平均値). ~~und Standardabweichung~~ / Regressions~~geraden~~ Kurven. 回帰曲線 curves of regression.

先ヅ

	X_1	X_2	...	X_i	...	X_m	f	M	σ
Y_1	$f_{1,1}$	$f_{2,1}$	...	$f_{i,1}$	...	$f_{m,1}$	f_1	M_1	σ_1
Y_2	$f_{1,2}$	$f_{2,2}$	...	$f_{i,2}$	...	$f_{m,2}$	f_2	M_2	σ_2
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	...	...	...	
Y_k	$f_{1,k}$	$f_{2,k}$	...	$f_{i,k}$	...	$f_{m,k}$	f_k	M_k	σ_k
⋮	⋮	⋮	...	...	...	...	...	...	
Y_n	$f_{1,n}$	$f_{2,n}$	...	$f_{i,n}$	...	$f_{m,n}$	f_n	M_n	
f'	f'_1	f'_2	...	f'_i	...	f'_m			
M'	M'_1	M'_2	...	M'_3	...	M'_m			

$M_{(x)}$; $M_{(y)}$

$$f_k = \sum_i f_{ik}$$

$$M_k = \frac{\sum_i X_i f_{ik}}{f_k}$$

先ヅ 各行, 各列ノ平均値ヲ作ル.

横ノ各行ノ Verteilung ノ（度数ヲ $f_1, f_2, \dots f_n$）算術平均ヲ $M_1, M_2, \dots M_n$

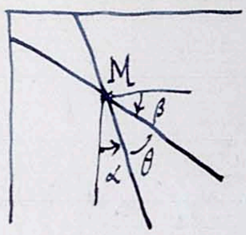
縦ノ各列 ,, ,, $f'_1, \dots f'_m$, 算術平均ヲ $M'_1, \dots M'_m$

トス.

相関係数

3. Correlation coefficient

4. 回帰曲線が（ニツトモ）直線ノ場合



I. ~~コノ場合ニハ中心Mヲ通ル~~

中心 M ノ定義

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(fM)}{\Sigma f}$$
$$\bar{y} = \frac{\Sigma(f'M')}{\Sigma f'}$$

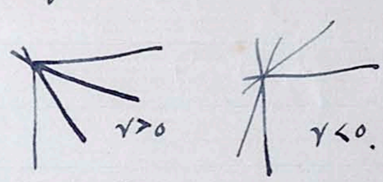
II.
$$\left.\begin{aligned} X - \bar{x} &= x \\ Y - \bar{y} &= y \end{aligned}\right\}$$

$$p = \frac{\Sigma f(xy)}{N}, \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma f y^2}{N}}$$

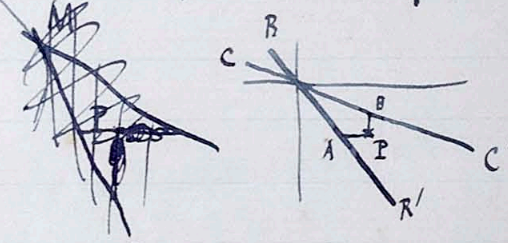
$$r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma(fxy)}{N \sigma_x \sigma_y}$$

I. 直線ハ中心Mヲ通ル.

III. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{\sigma_y^2}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{p}{\sigma_x^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{1-r^2}{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right) r}$$



II.



$$\Sigma f \overline{PA}^2 = N \sigma_x^2 (1-r^2)$$
$$\Sigma f \overline{PB}^2 = N \sigma_y^2 (1-r^2)$$

$-1 < r < +1$

IV コレラノ場合.

$r = 0.$
$r = +1, \quad r = -1.$

V. 例.

~~5. 回帰曲線が（少クトモ一ツハ）直線ナラザル場合~~

15

Correlation ratio 相関比.

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{f_1} \Sigma f (X - M_1)^2}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{f_2} \Sigma f (X - M_2)^2}$$
— — — —

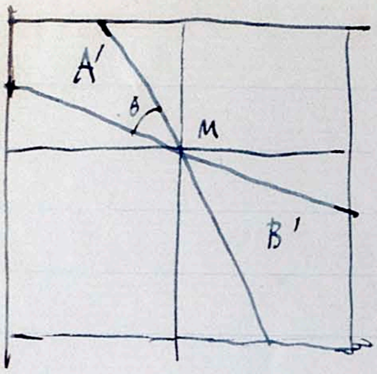
$$\Sigma_x = \sqrt{\frac{f_1\sigma_1^2 + f_2\sigma_2^2 + \cdots}{N}}$$

$$\eta_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma_x^2}{\sigma_x^2}}.$$

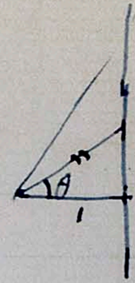
$\eta = 1$ ナラバ $\Sigma_x = 0$.

故ニ correlation ハ +1.

$1-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right),$ $\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right)^{2}}$

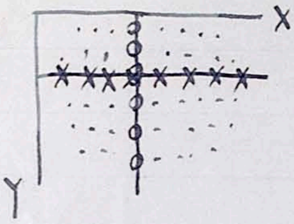


$\cancel{1-\tan\theta}$ $\cot\theta.$

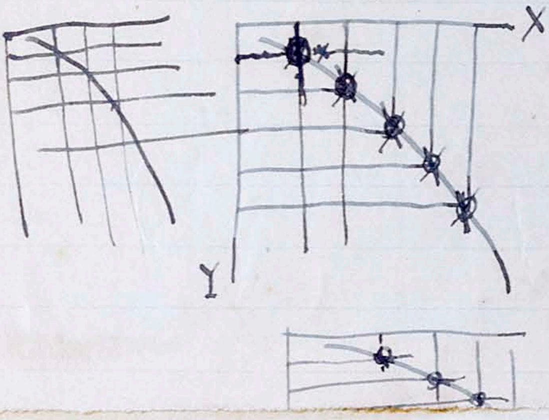


$\cancel{\frac{1}{\tan\theta}}$

(1) XトYトガ無関係ノ場合ニハ、コレ等ノ二ツノ曲線ハ夫々、X軸トY軸トニ平行ナル直線トナリテ直交ス。コレ即チ無関係ナルコトノ特徴ナリ。

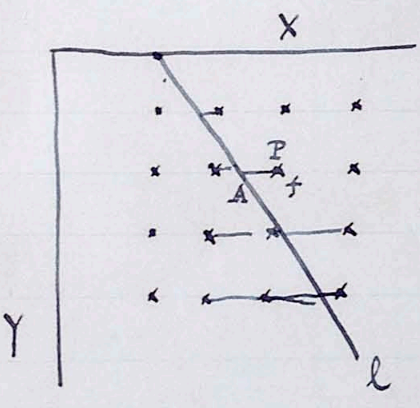


(2) XトYトガ函数的関係アル場合、即チ Correlation ガ完全ナル場合ニハ、二ツノ曲線ハ相重ナル。何トナレバ各行ノ点ハ（各列上ノ点モ）皆ソレゾレ其等ノ各行、各列ノ平均点ト一致ス。コレ完全相関ノ特徴ナリ。



一ツノ相関表ニ就テ、若シ各行上ノ総テノ点ガソノ上ノ平均点ト一致スル場合ニハ、各列上ノ総テノ点モマタソノ曲線上ニ一致シ、二ツノ曲線ハ相合ナリ、完全相関トナル。

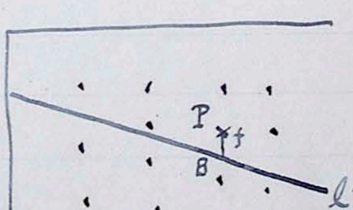
13. 最小偏差線



一ツノ直線 l ノ各点カラノ横ノ偏差トハ

$$\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(f\cdot\overline{PA}^2)}$$

ノコトナリ。コノ横ノ偏差ヲ極小ナラシメル様ナ直線 l ヲ引ク。



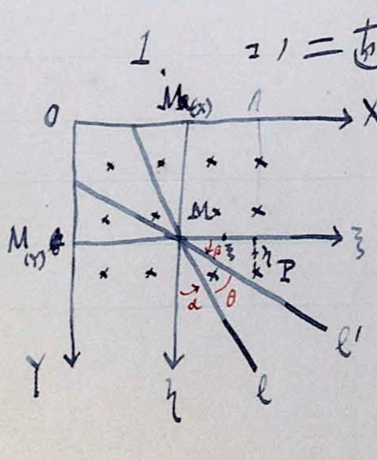
同様ニ縦ノ偏差

$$\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(f\cdot\overline{PB}^2)}$$

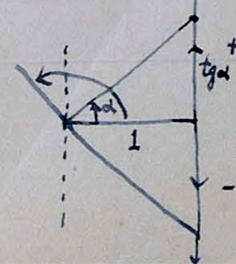
ヲ極小ナラシメル様ナ直線 l' ヲ引ク。

最小偏差線ノ性質。

1. コノ二直線 l, l' ハ相関表ノ中心 M ニ於テ相交ハル。



角 α ヲ作ル方法。(正切 $\tan\alpha$)
勾配(坂ノ)



3

12

4
10
6

20

11

24

10) 15

$$\begin{cases} \xi = X - M_x \\ \eta = Y - M_y \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(f\xi^2)}{N}} \quad (\text{全部総数}) \quad \cancel{= \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(f_i\xi_i^2)}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(f\eta^2)}{N}}.$$

$$p = \frac{\Sigma(f\xi\eta)}{N}.$$

相関係数 Coralation coefficient

$$r = \frac{p}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\Sigma(f\xi\eta)}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\Sigma(f\xi\eta)}{\sqrt{\Sigma(f\xi^2)}\sqrt{\Sigma(f\eta^2)}}.$$

ニカレトキハ

$$\tan\alpha = \frac{p}{\sigma_y^2}, \quad \tan\beta = \frac{p}{\sigma_x^2}, \quad \tan\theta = \frac{1-r^2}{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)r}.$$

$(\ell$へノ$)$ 横ノ標準偏差 $= N\sigma_x^2(1-r^2)$,

$(\ell'$へノ$)$ 縦 $= N\sigma_y^2(1-r^2)$.

故ニ $-1 \leqq r \leqq 1$.

二ツノ回帰曲線ガ共ニ直線ノ場合.

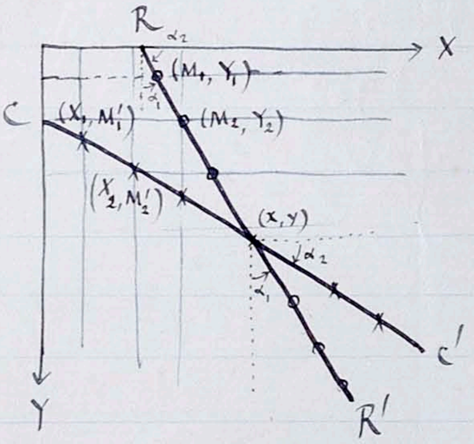
14. Linear regression

コノ場合ニハ二ツノ回帰曲線ハ最小偏差ナル ~~直線~~ ト一致ス

~~$(M_1, Y_1), (M_2, Y_2), \dots$ ハ直線上ニ RR'~~

コレハ最モ簡単ナル場合トシテ

~~$(X_1, M_1'), (X_2, M_2'), \dots$ ハ直線上ニ CC'~~



コノ二ツノ回帰曲線ガ直線ナル場合ノ事ハ Regressionsgeraden, line of regression. 回帰直線.

ソノ交点ヲ (x, y) トスレバ

RR': $$Y - y = \cot\alpha_1 \cdot (X - x)$$

コレカラ

$$\begin{array}{l|l}
Y_1 - y = \cot\alpha_1 \cdot (M_1 - x), & f_1 \\
Y_2 - y = \cot\alpha_1 \cdot (M_2 - x), & f_2 \\
\dots\dots & \dots \\
Y_k - y = \cot\alpha_1 \cdot (M_k - x), & f_k \\
\dots\dots & \dots \\
Y_n - y = \cot\alpha_1 \cdot (M_n - x) & f_n
\end{array}$$

$$\sum_k f_k Y_k - y \cdot \sum_k f_k = \cot\alpha_1 \cdot \left[\sum_k M_k f_k - x \cdot \sum_k f_k \right].$$

同様ニ

CC': $$\sum_i f_i' X_i - y \cdot \sum_i f_i' = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \left[\sum_i M_i' f_i' - x \cdot \sum_i f_i' \right].$$

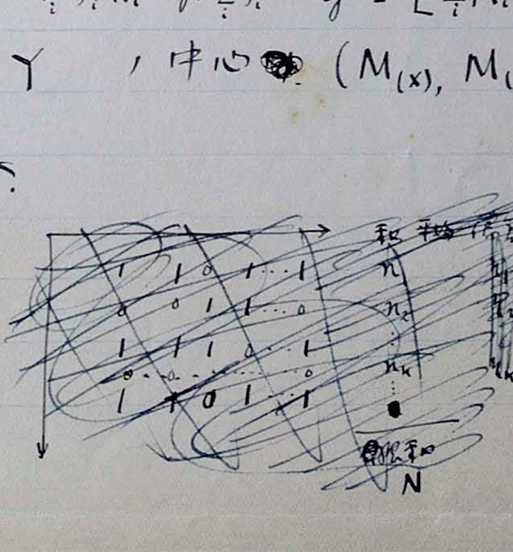
コレハ
$$x = \frac{\sum X_i f_i'}{\sum f_i'} = \frac{\sum (f_k M_k)}{\sum f_k},$$
$$y = \frac{\sum (f_i' M_i')}{\sum f_i'} = \frac{\sum f_k Y_k}{\sum f_k}$$

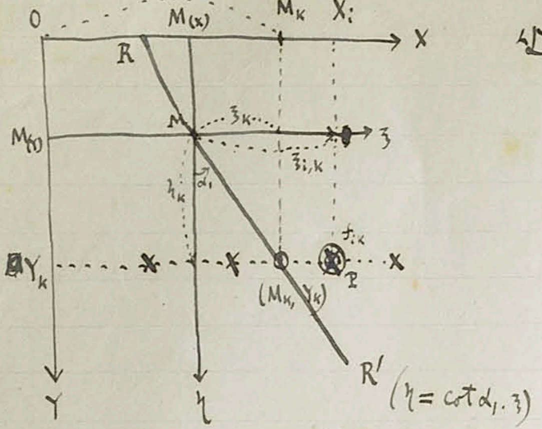
ニヨッテ満足ス. 即チ RR', CC' ノ交点ハ X, Y ノ中心 $(M_{(x)}, M_{(y)})$ ナリ.

~~Regressionskoeffizienten~~

~~Galton'sche Diagramme~~

直線 RR' ノ方程式ヲ求メル.





坐標ノ原点ヲ $(M_{(x)}, M_{(Y)})$ ニ移シ、

$$\begin{cases} X - M_{(x)} = \xi, \\ Y - M_{(Y)} = \eta \end{cases}$$ トオク。

RR′ ノ方程式ヲ $\eta = \cot\alpha_1 \cdot \xi$ トオク。点 (M_k, Y_k) ノ新坐標ヲ (ξ_k, η_k) トセバ

$$\xi_k = \eta_k \cdot \operatorname{tg}\alpha_1.$$

サテ Y_k ナル横線上ニ在ル一点 P ヲ取レバ

$$\xi_{ik} = X_i - M_{(x)}$$

$$f_{ik}\,\xi_{ik} = f_{ik}\,X_{ik} - M_{(x)}\,f_{ik}$$

$$\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik} = \sum_i f_{ik}\,X_i - f_k\,M_{(x)}$$

$\sum_i f_{ik}\,X_i = f_k\,M_k$ （M_k ハ平均値ナレバ）.

故ニ $\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik} = f_k\,(M_k - M_{(x)})$ 即チ $\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik} = f_k \cdot \xi_k$.

由テ $\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik} = f_k \cdot \eta_k \operatorname{tg}\alpha_1$.　$\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik}\,\eta_k = f_k\,\eta_k^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1$.

コレヲ k ニ就キテ加フレバ 平面全体ノ点ニ及ボサバ、

$$\sum_k \Big(\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik}\,\eta_k \Big) = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \sum_k f_k\,\eta_k^2.$$

左辺ハ $\sum_k \Big(\sum_i f_{ik}\,\xi_{ik}\,\eta_k \Big) = \sum_{ik} f_{ik}\,\xi_{ik}\,\eta_{ik}$　（總テノ点（重ナルモノヲ別々ニ勘定シテ）ノ坐標 ξ, η ノ積ノ和）

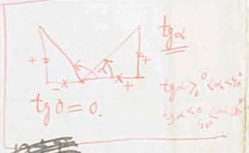
$= pN$ トオク.　N ハ全体ノ点ノ数

次ニ右辺ハ $\sum_k f_k\,\eta_k^2 = \sum_k \Big(\sum_i f_{ik}\,\eta_{ik}^2 \Big)$　（$\eta_{ik} = \eta_k$, $\sum f_{ik} = f_k$）何トナレバ Y_k ナル横線上ニ在レバ

各行ニ就キテ

$= \sum_{ik} \big(f_{ik}\,\eta_{ik}^2 \big)$　總テノ点ニ就テ

コレヲ $= N\,\sigma_{(Y)}^2$ トオク,



即チ $p = \dfrac{\sum_{ik} f_{ik}\,\xi_{ik}\,\eta_{ik}}{N}$,　$\sigma_{(Y)} = \sqrt{\dfrac{\sum f_{ik}\,\eta_{ik}^2}{N}}$, $= \sqrt{\dfrac{\sum f_k\,\eta_k^2}{N}}$

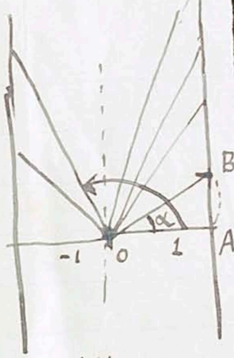
トオケバ $pN = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot N\,\sigma_{(Y)}^2$.　∴ $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{p}{\sigma_{(Y)}^2}$

故ニ　RR′：　$\xi = \dfrac{p}{\sigma_{(Y)}^2}\,\eta$.

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{p}{\sigma_Y^2}$

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{p}{\sigma_x^2}$

同様ニ　CC′：　$\eta = \dfrac{p}{\sigma_{(x)}^2}\,\xi$.　　$\sigma_{(x)} = \sqrt{\dfrac{\sum f_{ik}\,\xi_{ik}^2}{N}}$



横ノ列ノ = Standard Abweichung.

コノ $\sigma_{(x)}, \sigma_{(Y)}$ ヲ regressionskoeffizienten（回帰係数）トイフ.　$\sigma_{(x)} > 0$, $\sigma_{(Y)} > 0$ コレハ 0 トナルコトナシ.

今 $r = \dfrac{p}{\sigma_{(x)}\,\sigma_{(Y)}}$ トオケバ、

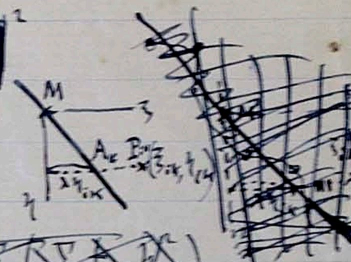
RR′：$\xi = r\,\dfrac{\sigma_{(x)}}{\sigma_{(Y)}}\,\eta$.　|　CC′：$\eta = r\,\dfrac{\sigma_{(Y)}}{\sigma_{(x)}}\,\xi$.

中心 $(M_{(x)}, M_{(Y)})$ ヲ通ル 直線ノ中デ 回帰

直線ニ對シテ，平面上ノ各點ト直線トノ距離ノ度 $\Sigma f_{ik} \overline{AP}_{ik}^2$，$\Sigma f_{ik} \overline{BP}_{ik}^2$

$$\sum_{ik} \left[f_{ik} \left(\xi_{ik} - \lambda \eta_{ik} \right) \right]^2 \qquad \sum f_{ik} \left(\eta_{ik} - \lambda \xi_{ik} \right)$$

ハ Min. トナル。



λ ニ就キテ 微分スレバ $\sum_{i,k} f_{ik} \eta_{ik} (\xi_{ik} - \lambda \eta_{ik}) = 0.$

$$\sum_{i,k} (f_{ik} \xi_{ik} \eta_{ik}) - \lambda \sum_{i,k} f_{ik} \eta_{ik}^2 = 0.$$

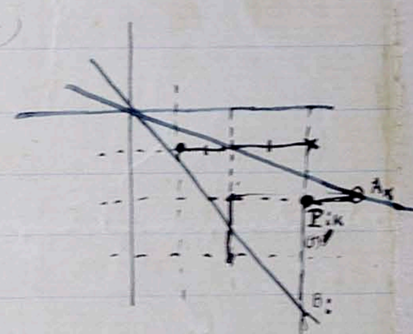
故ニ

$$\lambda = \frac{\Sigma (f_{ik} \xi_{ik} \eta_{ik})}{\Sigma (f_{ik} \eta_{ik}^2)} = \frac{pN}{N \sigma_{(Y)}^2} = \frac{p}{\sigma_{(Y)}^2}.$$

10. Korrelationskoeffizient. (correlation-coefficient 相関係数).

$$r = \frac{p}{\sigma_{(x)} \sigma_{(Y)}}$$

回帰直線ヘノ距離ノ $= \sum_{ik} \left[f_{ik} (\xi_{ik} - \lambda \eta_{ik}) \right]^2$ ノ Min. ヲ求ムルニハ　$\Sigma f(\overline{PA})^2 =$



$$= \sum_{ik} f_{ik} \xi_{ik}^2 - 2\lambda \Sigma f_{ik} \xi_{ik} \eta_{ik} + \lambda^2 \Sigma f_{ik} \eta_{ik}^2$$

$$= \Sigma f_{ik} \xi_{ik}^2 - 2 \frac{p}{\sigma_{(Y)}^2} \Sigma f_{ik} \xi_{ik} \eta_{ik} + \frac{p^2}{\sigma_{(Y)}^4} \Sigma f_{ik} \eta_{ik}^2$$

$$= N \sigma_{(x)}^2 - 2 \frac{p}{\sigma_{(Y)}^2} N p + \frac{p^2}{\sigma_{(Y)}^4} N \sigma_{(Y)}^2$$

$$= N \sigma_{(x)}^2 \left[1 - \frac{p^2}{\sigma_{(x)}^2 \sigma_{(Y)}^2} \right] = N \sigma_{(x)}^2 (1 - r^2).$$

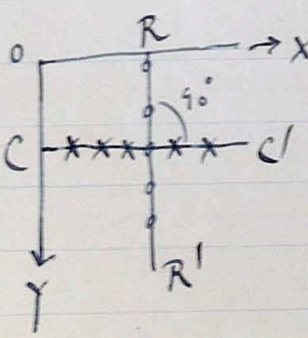
同様ニ

$$\sum_{ik} \left[f_{ik} (\eta_{ik} - \lambda \xi_{ik}) \right]^2 = N \sigma_{(Y)}^2 (1 - r^2) \quad = \Sigma f_i \overline{PB}^2$$

由テ　$-1 \leqq r \leqq 1.$

是ヨリ r ノ意味ヲ考フル。

I. 二ツノ事項 X, Y ガ 全然無関係ナル場合ニハ，



故ニ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$　即チ $\frac{p}{\sigma_{(Y)}^2} = 0$, $\frac{p}{\sigma_{(x)}^2} = 0$.

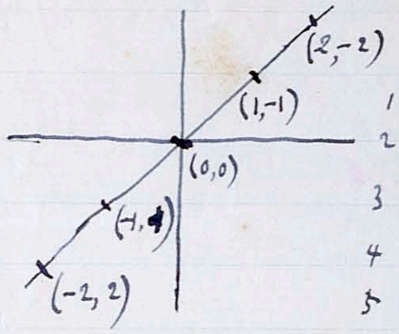
由テ　$r = 0.$

逆ニ $r = 0$ ナレバ，$p = 0$. 故ニ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. 依ニ X, Y ハ 無関係ナリ。

$X_i = $

$$\sqrt{\frac{\sum f_{ik}\xi_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (f_{ik}+f'_{ik})\xi_i^2}{N+N'}}.$$

$$\frac{\sum f_{ik}\xi_i^2}{N} = \frac{\sum (f_{ik}+f'_{ik})\xi_i^2}{N+N'} = \frac{\sum f'_{ik}\xi_i^2}{N'}.$$



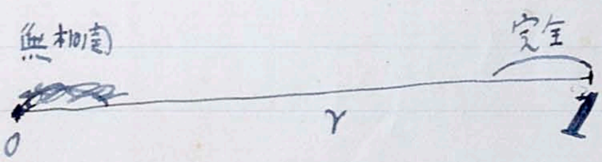
	1	2	3	4	5	f	M
1					1	1	5
2				2		2	4
3			4			4	3
4		2				2	2
5	1					1	1
						$N=10.$	

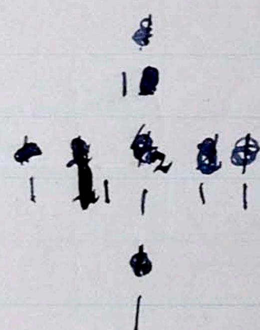
5
12
4
1
3 0

10.

$$\frac{4\times 0^2 + 2\times 1^2 + 1\times 2^2 + 2\times 1^2 + 1\times 2^2}{10} = 1.$$

$$p = \frac{10}{10} = 1.$$



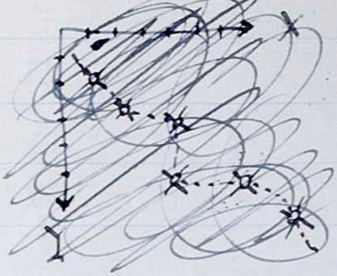


		2		
		2		
2	2	4	2	2
		2		
		2		

		(0,-2)		
		(0,-1)		
(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)
		(0,1)		
		(0,2)		

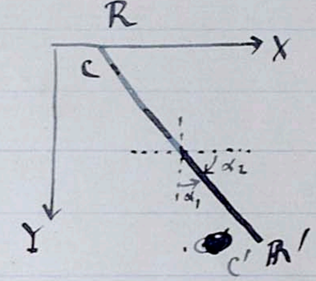
4+1

II.

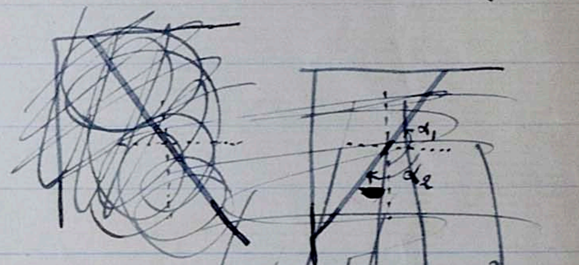


二ツノ変 X, Y ガ 完全ニ関係アル場合.

~~[illegible]~~ 即チ $Y = f(x)$. (X_i ガ 与ヘラレバ Y_i ハ 定マル).



然ル RR' ト CC' トハ 重ナル.



$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

$$\cancel{\alpha_2 + \alpha_1 = \frac{3}{2}\pi}$$

$$\cancel{\alpha_2 = \frac{3}{2}\pi - \alpha_1.}$$

$$\cancel{tg\,\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \cot\alpha_1.}$$

$$tg\,\alpha_2 = \cot\alpha_1.$$

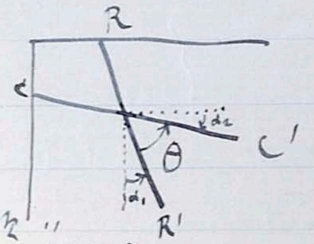
何レニモ等シ

$$\frac{p}{\sigma_{(x)}^2} = \frac{\sigma_{(Y)}^2}{p}$$

$$\frac{p^2}{\sigma_{(x)}^2\,\sigma_{(Y)}^2} = 1.$$

然ル $r = \pm 1.$

コノ ± ヲ 考ヘル



(正相関)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_2$$

$$tg\,\theta = \cot(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1 - tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} = \frac{1 - \frac{p^2}{\sigma_{(x)}^2\,\sigma_{(Y)}^2}}{\frac{p}{\sigma_{(x)}^2} + \frac{p}{\sigma_{(Y)}^2}}$$

$$\therefore\ tg\,\theta = \frac{1 - r^2}{\left[\frac{\sigma_{(x)}}{\sigma_{(Y)}} + \frac{\sigma_{(Y)}}{\sigma_{(x)}}\right] r}.$$

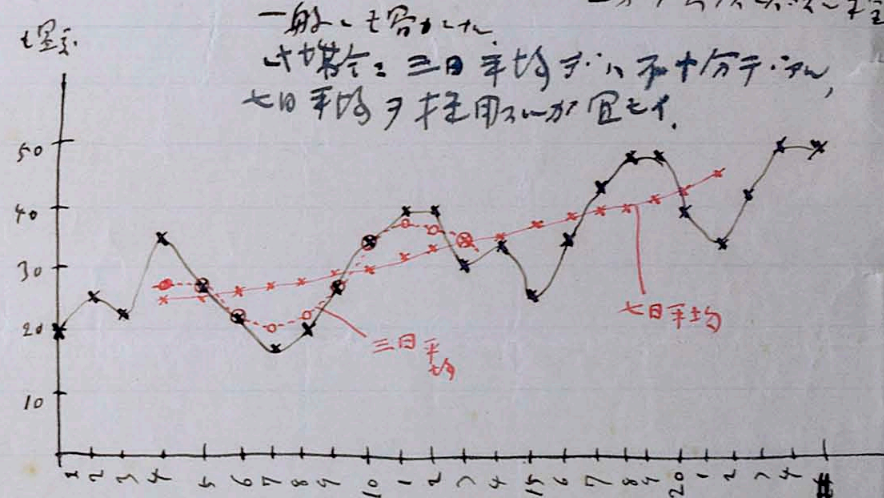
21. 一ツノ事象ガ時間ニ従ッテ変動スルトキ，多クノ場合ニ就テハ，一ツノ長期ニ亘ル変化ト短期的ニ起ル変化トガ成立ッテ居ル。例ヘバ3月1日カラ3月24日マデノ気温ヲ取リ出シテ見ルニ，長期ニ亘ル変化トシテハ(即チ大勢トシテハ)気温ガ漸々増スコトデアル(漸々暖カナル即チ)。然ルニ日ニ由ッテハ前日ヨリモ寒イ日モアル，其日其日ノ気温ノ変化(即チ短期的変化)ガアル。

今其日其日ノ変化ヲ除イテ，漸々気温ガ如何様ニ増加スルカ即チ長期的変化ヲ見ルニハ如何ニスベキカ。ソレニハ移動平均法 moving averages method ヲ用フルガ宜シイ。

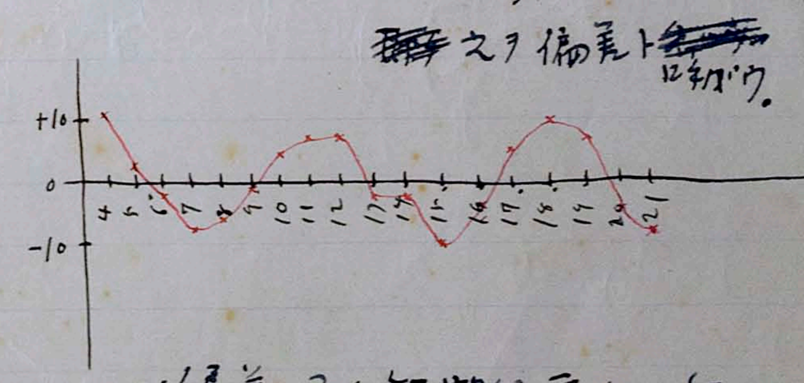
日	温度(華氏)	三日平均	七日平均	差
3月 1日	20°			
2	25°			
3	22			
4	35	27.6	24.0	+11.0
5	26	27.6	24.0	+2.0
6	22	22.0	24.4	-2.4
7	18	20.0	26.1	-8.1
8	20	22.0	26.7	-6.7
9	28	27.3	28.7	-0.7
10	34	33.6	29.9	+4.1
11	39	37.6	31.9	+7.1
12	40	36.3	32.7	+7.3
13	30	34.0	33.6	-3.6
14	32		34.9	-2.9
15	26		36.1	-10.1
16	34		37.1	-3.1
17	43		38.4	+4.6
18	48		38.9	+9.1
19	47		41.1	+6.9
20	39		43.3	-4.3
21	35		44.3	-9.3
22	42			
23	49			
24	50			

~~moving average, 7 days grouping~~

コノ区分(群ノ数)ノ大サハ，moving averageノ曲線ガ凸凹少ク滑カナル様取ルヲ可トス。区分ヲ大クスレバスル程一般ニ滑カナル。此場合ニ三日平均デハ不十分デアル，七日平均ヲ採用スルガ宜シイ。



長期的変動ヲ除クタメニハ，moving averageト其日其日ノ温度トノ差ヲ用フルヲ可トス。之ヲ偏差ト云フ。



コノ偏差ハ即チ短期的変化ヲ示スモノデアル(　　図)。

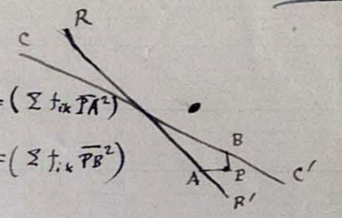
curves of regressionガ直線ニアラズトモ可ナリ

(2) $r=\pm1$ ナル場合ハ，決シテ存在セズ。何トナレバ回帰直線ニ基キテ

$$\sum f_{ik}\left[\xi_{ik}-(\lambda\eta_{ik}+\mu)\right]^2 = N\sigma_{(x)}^2(1-r^2),$$
$$\sum f_{ik}\left[\eta_{ik}-(\lambda\xi_{ik}+\mu)\right]^2 = N\sigma_{(y)}^2(1-r^2)$$

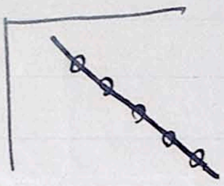
$=(\sum f_{ik}\overline{PA}^2)$

$=(\sum f_{ik}\overline{PB}^2)$



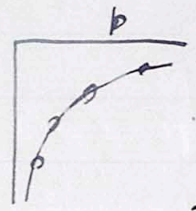
ナレバ，$r^2=1$ ナルトキハ

$\xi_{ik}-(\lambda\eta_{ik}+\mu)=0$ 従テ凡テノ点ハ回帰直線上ニアリ。



定理. $r=\pm1$ ナル為メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ，~~[illegible]~~ 凡テノ点ガ相重ル line of regression ノ上ニアルコトナリ。

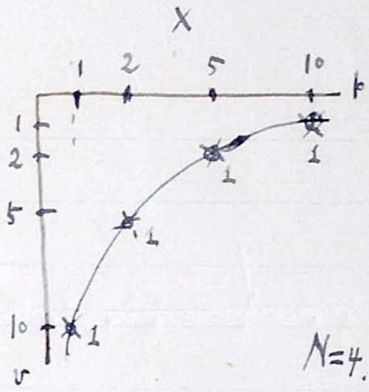
従テ



$pv=$ konst. ノ如キ完全ナル Correlationノ場合ニモ $r^2=1$ トナルコトナシ。

コレ即チ Correlationskoeffizient r ニテ Korrelat ノ程度ヲハカル一大欠点ナリ。

従テ Galton ノ図形ヲ作リ，~~[illegible]~~ 回帰曲線ガ直線ナラザル場合ニ，r ノ値ヲ求ムルコトハ，全ク有意義ノコトニアラズ。



v $p=10$.

M

10

5

2

1

$p=1.$	$v=10$
2	5
5	2
10	1

$f=1.$

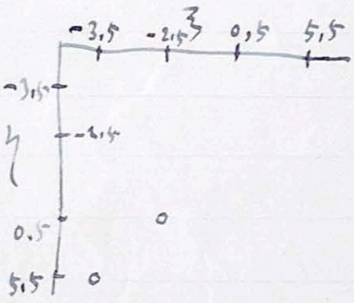
$N=4.$

M' 10 5 2 1

$$M_{(x)}=\frac{1+2+5+10}{4}=\frac{18}{4}=4{,}5$$

$$M_{(y)}=4{,}5$$

12,25
6,25
0,25
30,25
49



$$\sum(f\xi^2)=(-3{,}5)^2+(-2{,}5)^2+(0{,}5)^2+(5{,}5)^2=49$$

$$\sum(f\eta^2)=49$$

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}.$$

$$\sigma_{(y)}=\frac{7}{2}.$$

$$\sum(f\xi\eta)=(-3{,}5)(5{,}5)+(-2{,}5)(0{,}5)+(0{,}5)(-2{,}5)+(5{,}5)(-3{,}5)$$
$$=-41.$$

2.5 × .5 = 1.25

3.5 × 5.5: 175, 175, 19,25; 1,25; 20,5; 2; 41.0

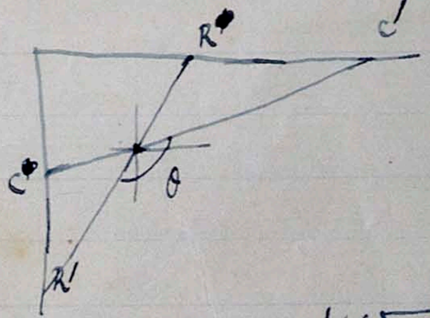
$$p=-\frac{41}{4}.$$

$$r=-\frac{\frac{41}{4}}{\frac{49}{4}}=-\frac{41}{49}=-0{,}83\ldots$$

49) 41 (0,83
39 2
1 8 0
1 . 6

RR' $\quad \xi=\frac{p}{\sigma_y^2}\eta=-\frac{41}{49}\eta=-0{,}83\eta.$

CC' $\quad \eta=-0{,}83\xi.$



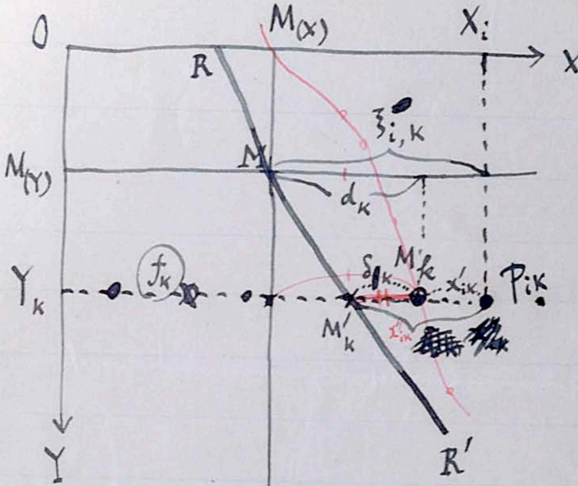
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1-r^2}{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)r}=\frac{1-(0{,}83)^2}{-2\times0{,}83}$$
$$=-\frac{0{,}31}{1{,}66}$$
$$=-0{,}19\ldots \quad \theta \fallingdotseq 11^\circ$$

166) 31 (.19

1.00, .69, .31

83 × 2 = 166

~~Relation between~~ Correlati ratio ヲ計算スル便法.



今 直線(回帰) RR' ヲ引ク. 一般ニ M_k ハコノ上ニ無

$$d_k = M_k - M_{(x)}.$$

$$\frac{\sum f_k d_k^2}{N} \equiv \mu_{(x)}^2 \quad \text{トオク. (定義)}$$

$$X_i - M_k = x'_{ik}.$$

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum f_{ik} x'^2_{ik}}{f_k}.$$

$$\sigma_{(x)}^2 = \frac{\sum f_k \sigma_k^2}{N}.$$

前ニ述ベル

$$X_i - M_{(x)} = \xi_{i,k}$$

$$\frac{\sum_i f_{i,k} \xi_{i,k}^2}{f_k} = \xi_k^2 \quad (\text{横列 } Y_k \text{ ノ上デハ})$$

$$\frac{\sum f_k \xi_k^2}{N} = \sigma_{(x)}^2.$$

既ニ知レリ

第四表

サテ $\xi_{i,k} = d_k + x'_{i,k}$.

$$f_{i,k}\xi_{i,k}^2 = f_{i,k} d_k^2 + 2 f_{i,k} d_k x'_{ik} + f_{i,k} x'^2_{i,k}.$$

M_k ハ中心ナレバ $\sum_i f_{i,k} x'_{i,k} = 0$.

i ニツキテ加ヘテ f_k デワレバ

$$\xi_k^2 = d_k^2 + \sigma_k^2. \qquad \frac{\sum f_k \xi_k^2}{N} = \frac{\sum f_k d_k^2}{N} + \frac{\sum f_k \sigma_k^2}{N}$$

故ニ $$\sigma_{(x)}^2 = \mu_{(x)}^2 + \tau_{(x)}^2.$$

∴ $$1 - \frac{\tau_{(x)}^2}{\sigma_x^{(2)}} = \frac{\mu_{(x)}^2}{\sigma_{(x)}^2}.$$

故ニ $$\eta_{(x,y)}^2 = \frac{\mu_{(x)}^2}{\sigma_{(x)}^2}.$$ 同様ニ $$\eta_{(y,x)} = \frac{\mu_{(y)}^2}{\sigma_{(y)}^2}$$

コノ式ニテ $\eta_{(x,y)}$ ヲ計算スルヲ便ナリトス 標準偏差ノ計算ニ際シ 第四表ヲ見ヨ.

15. Korrelationskoeffizient und Verhältniss.

$X_i - M'_k = x''_{i,k}$ トオク

$$\frac{\sum f_{i,k} x''_{i,k}}{f_k} = m_k^2$$

$$\frac{\sum f_k m_k^2}{N} = m_{(x)}^2$$

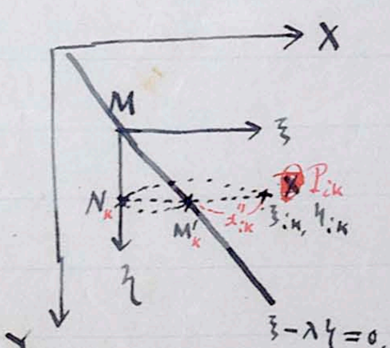
$M_k - M'_k = \delta_k$

$$\frac{\sum f_k \delta_k^2}{N} = \delta_{(x)}^2$$ トオク.

$$x''_{i,k} = \delta_k + x'_{i,k}.$$

上ト全ク同様ニ考ヘ

$$m_{(x)}^2 = \delta_{(x)}^2 + \tau_{(x)}^2.$$



$$\sum_{i,k}\left[f_{ik}(\xi_{ik} - \lambda\eta_{ik})^2\right] = N\sigma_{(x)}^2(1-r^2).$$

$\overline{M'_k N_k} = \lambda\eta_{ik}$,

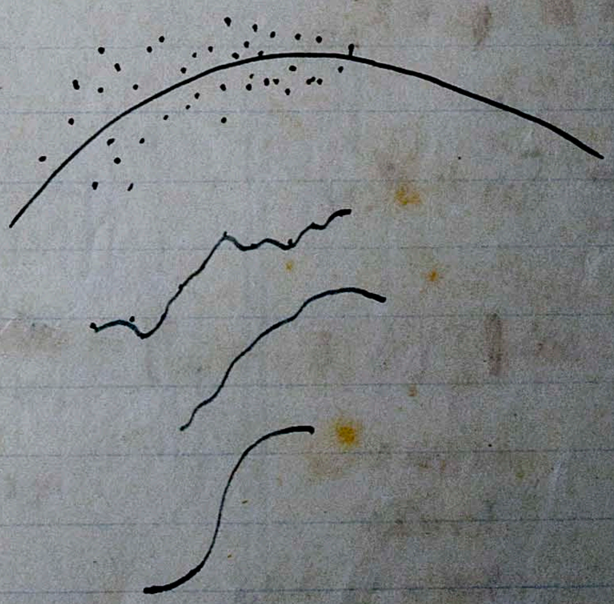
$\xi_{ik} = \overline{P_{ik} N_k}$

$\overline{P_{ik} M'_k} = \xi_{ik} - \lambda\eta_{ik}$.

故ニ $$m_{(x)}^2 = \sigma_{(x)}^2(1-r^2).$$

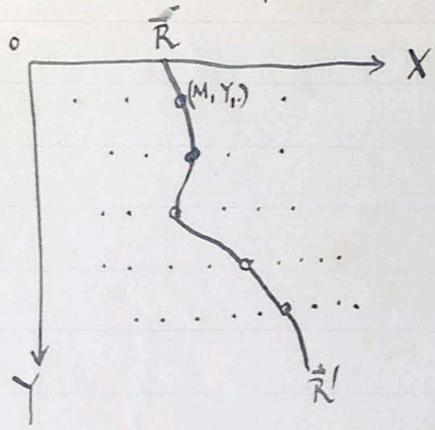
同様ニ $$m_{(y)}^2 = \sigma_{(y)}^2(1-r^2).$$

故ニ $$(1-r^2)\sigma_{(x)}^2 = \delta_{(x)}^2 + \tau_{(x)}^2$$
$$= \delta_{(x)}^2 + \sigma_{(x)}^2 - \mu_{(x)}^2$$



16 ~~補足~~,

Korrelationsverhältnies (correlation ratio 相関比).



$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{f_1}\sum_i f_{i,1}(X_i - M_1)^2} & \text{第一行ノ点ノ } M_1 \text{ ノ周リノ散バリ方ヲ示セル標準偏差} \\ \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{f_2}\sum_i f_{i,2}(X_i - M_2)^2} & \text{第二行} \\ \sigma_k = \cdots\cdots & \text{第k行} \\ \sigma_n = \sqrt{\frac{1}{f_n}\sum_i f_{i,n}(X_i - M_n)^2} & \text{第n行} \end{cases}$$

コノ曲線 RR' ニ対スル平面全体ノ点ノ散バリ方ヲ ~~見ル~~ 知ルニハ、各行ノ標準偏差（平均的）トモ云フベキ

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} f_k \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{n} f_k}} \quad \text{即チ} \quad \sqrt{\frac{\sum f_k \sigma_k^2}{N}} = \tau_{(X)}$$

ヲ考ヘテ見レバ可ナリ。Pearson ハ コノ代リニ

$$\eta_{(X,Y)} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{(X)}^2}{\sigma_{(X)}^2}}$$

ヲ考ヘタリ。

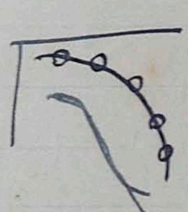
Y ニ於ケル X ノ Korrelationsverhältniss. (correlation-ratio 相関比)

$$0 \leq \eta_{(XY)} \leq 1$$

$\eta_{XY} = 1$ ナル場合ニハ、$\tau_{(X)} = 0$, $\therefore \sum f_k \sigma_k^2 = 0$. 故ニ

$\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, ... $\sigma_n = 0$.

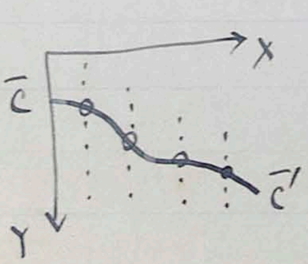
故ニ 第一行ノ点ハ皆 M_1 ニ合シ、
第二 ... M_2 ニ合シ、
. . . . . .



即チ平面上ノ各点ハ曲線 RR' ノ上ニアル。換言スレバ、X ト Y トハ函数的関係ヲ有ス。

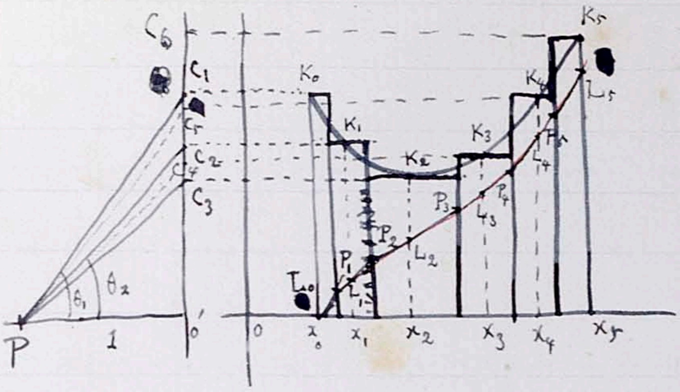
同様ニ X ニ於ケル Y ノ相関比ハ

$$\eta_{(Y,X)} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{(Y)}^2}{\sigma_{(Y)}^2}} \qquad \tau_{(Y)} = \sqrt{\frac{\sum f'_k \sigma'^2_k}{N}}$$



故ニ $\eta_{(Y,X)}$, $\eta_{(X,Y)}$ ガ 1 ニ近イ程 X ト Y トハ関係ガ深イ。 $\eta_{(X,Y)} = 1$ ナルトキ必ズシモ $\eta_{(Y,X)} = 1$ ナラズ。

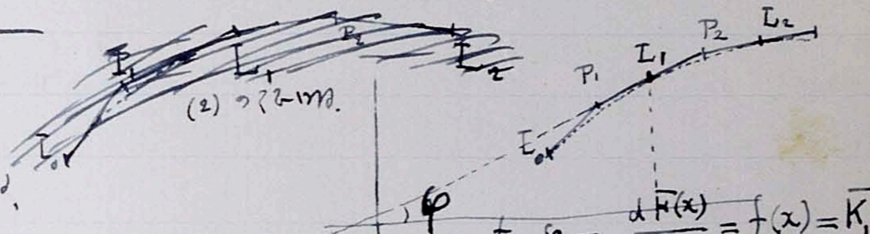
IV. 積分曲線の作図、 (a) 平均横線



補正の條件. $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

(1) 点 $L_0, L_1, L_2, \cdots L_5$ を通るやうに。

(2) これ等の点に於て積分曲線に切するやうに。



先づ外接多角形を求めることになる。

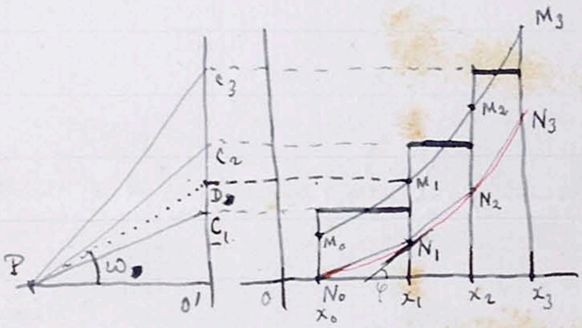
$\tan\varphi = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x) = \overline{K_1x_1}$

先づ積分の定義から

一方 P_1P_2 の方向は $\tan\theta_2 = \overline{C_2O'}$

しかるに $\overline{K_1x_1} = \overline{C_2O'}$. 故に $\varphi = \theta_2$.

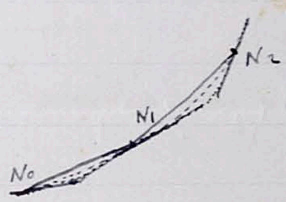
(b) 平均縦線



補正條件

(1) 点 N_0, N_1, N_2, N_3 を通るやうに。

(2) $N_1, N_2, N_3, \cdots$ に於ける切線の方向が $PD_1, PD_2, \cdots$ に平行である。



$\tan\varphi = \dfrac{dF}{dx} = f(x) = \overline{M_1x_1}$

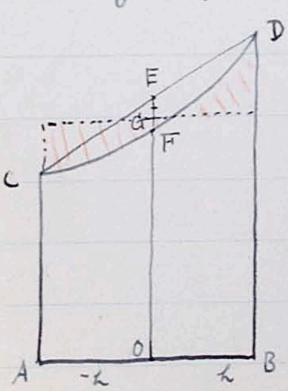
$= \overline{D_1O'} = \tan\omega_1$

先づ内接多角形を求めることになる。[この意味では (a) に劣る。]

しかし $x_1, x_2, x_3, \cdots$ に於ける積分値のみを知りたい —— 全積分曲線を畫くのでなく —— 場合には、作図が簡單であるので、(a) に優る。

注意 [I] 二種の平均線の作図

$y = \phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. [or $= a_0 + a_1x + a_2x^2$] と假定する。ABの中点をOとする。OB, OEを直角座標の軸にとる。



面積 $S = \int_{-h}^{h}\phi(x)\,dx = 2a_0h + \frac{2}{3}a_2h^3$.

平均縦線 mean ordinate の長さを η (= OG) とすれば

面積 $S = 2h\cdot\eta$ 故に $\eta = a_0 + \dfrac{a_2}{3}h^2$.

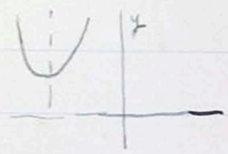
$$\begin{cases} OF = a_0 \\ AC = a_0 - a_1h + a_2h^2 - a_3h^3 \\ BD = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{4\overline{OF} + (\overline{AC} + \overline{BD})}{6} = \frac{2\cdot\overline{OF} + \overline{OE}}{3}, \quad OE - \eta = \frac{2}{3}(OE - OF)$$

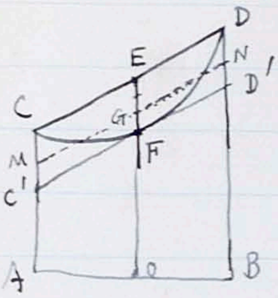
∴ $\overline{EG} = \frac{2}{3}\overline{EF}$

これで平均縱線の位置が定まる。

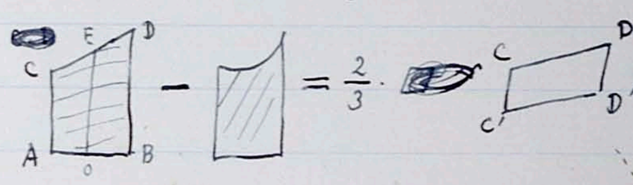
特に $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 即ち 軸が y軸に平行な抛物線 について は、その上に更に

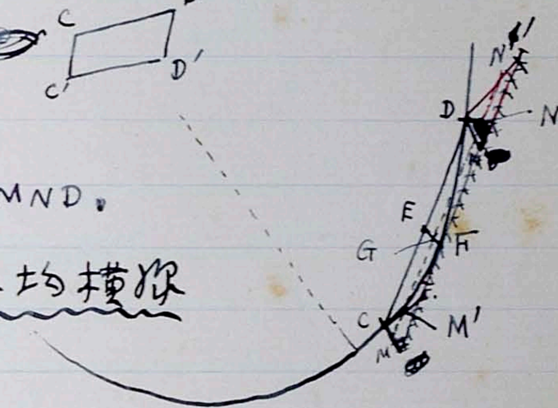


$$\frac{\phi(h)-\phi(-h)}{2h} = a_1 , \quad \phi'(0) = a_1 \quad \text{なるから} \quad CD \parallel C'D'.$$



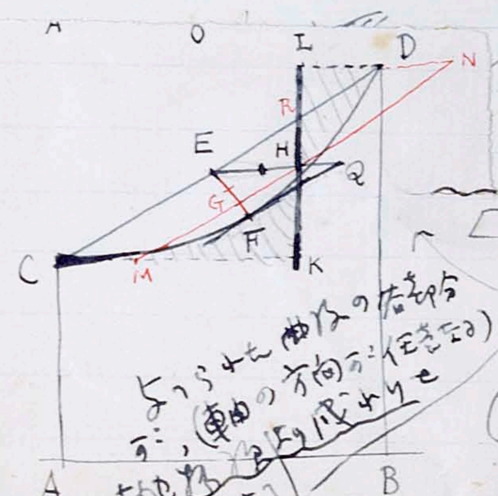
$$2h(OE - \eta) = \frac{2}{3} \cdot 2h(EF).$$





故に CFDE = ▱ CMND.

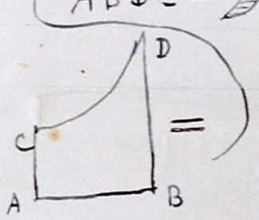
以上の準備の下に、平均横線の位置を決定しよう。

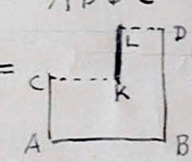


与えられた曲線の右部分が、（軸の方向が任意なる）抛物線の弧と成りうるとき位置を定する。のみ

▱ CMND = CMHR + ΔLHN − ΔLRD
= CMHR + ΔMKH − ΔLRD
= ΔCKR − ΔLRD

ABDC − CFDE = ABDC − ▱ CMND
= ABDC − ΔCKR + ΔLRD



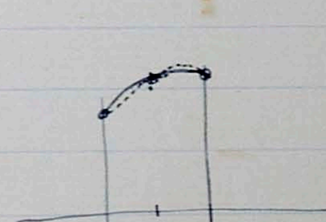


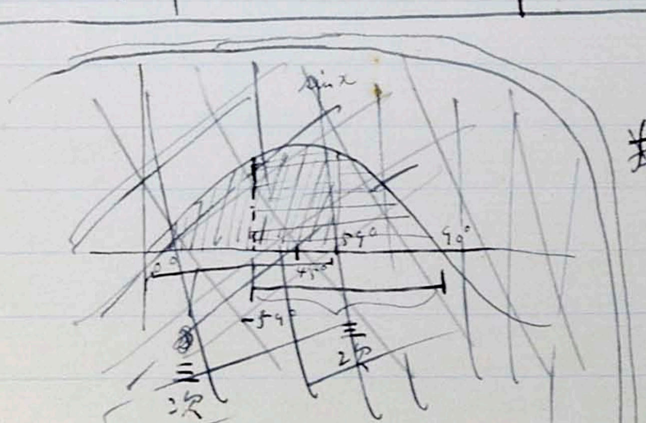
参考 relative error の範囲

appr. formula	0.1 %	1 %
$\sin x \fallingdotseq x$	$-0.077 < x < 0.077$ $(-4°.4 \quad 4°.4)$	$-0.244 < x < 0.244$ $(-14°.0 \quad 14°.0)$
$\sin x \fallingdotseq x - \frac{x^3}{3!}$	$-0.576 < x < 0.576$ $(-33° \quad 33°)$	$-1.032 < x < 1.032$ $(-59° \quad 59°)$
$\cos x \fallingdotseq 1 - \frac{x^2}{2!}$	$-0.384 < x < 0.384$ $(-22°.0 \quad 22°)$	$-0.650 < x < 0.650$ $(-37°.2 \quad 37°.2)$
$(1+x)^{-1} \fallingdotseq 1 - x$	$-0.03 < x < 0.03$	$-0.1 < x < 0.1$
$(1+x)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1 + \frac{x}{2}$	$-0.08 < x < 0.10$	$-0.24 < x < 0.32$

yの誤差 absolute error を Δy とするとき、$\frac{\Delta y}{y}$ を相対誤差という。

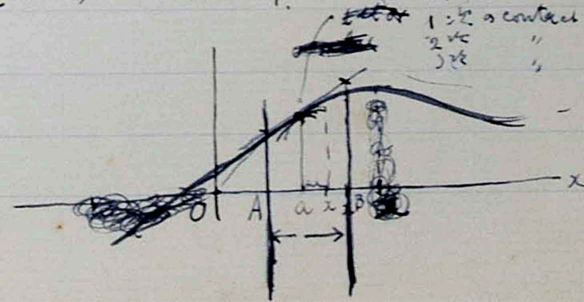
[Numerical integral calculation] の所で詳述する





$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot x + \frac{f''(a)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

1次の contact
2次 〃
3次 〃



Ex. $Y=\int_1^x \frac{dx}{x}$ $\log_e x$

$Y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$. probability integral

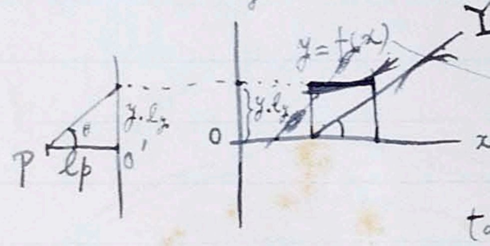
$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $= F(k,\varphi)$ $k = 0,\ 0.5,\ 0.8,\ 1.0$ $(k^2 \leqq 1)$ elliptic integral of the first kind

$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $x = \sin\varphi = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u$.

$Y = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)dx$ Fresnel integral

$\left[\cos\frac{\pi x^2}{2} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)^2 + \dots\right]\binom{\sin}{\cos}$

注意 $\boxed{\mathrm{II}}$ 單位の変更



$Y = \int f(x)dx$ $= F(x)$

x の単位 l_x Yの単位 l_Y

y の 〃 l_y

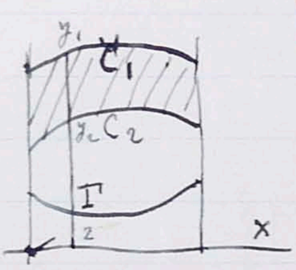
$\boxed{\frac{dY}{dx} = y}$ なるため

$\tan\theta = \frac{y\cdot l_y}{l_p}$. $\tan\theta = \frac{d(Y\cdot l_Y)}{d(x\cdot l_x)}$

$= \frac{l_Y}{l_x}\cdot\frac{dY}{dx} = \frac{l_Y}{l_x}\cdot y$.

$\frac{l_y}{l_p} = \frac{l_Y}{l_x}$. なることが必要且に十分である。

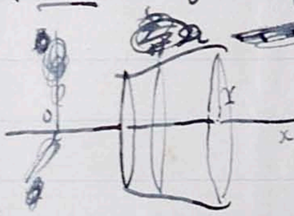
應用



$w = y_1 - y_2$

I. area. (zone)

II. volume of surface of revolution.



$V = \pi\int r^2 dx$ $\left[y = \pi[r^2(x)]^2\right]$

(1) $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ $0<k^2<1$ ellip. integ. of second kind.

(2) $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$ integral sine (cos)

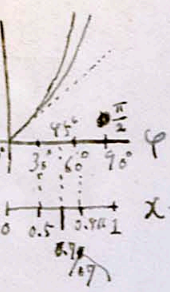
(3) $li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log_e x}$ $x = 100$ のとき $y = 30.126$ となりやるか

$Y = \int\frac{dx}{\log_e x}$ $(100 \leqq x \leqq 10000)$ を画け。

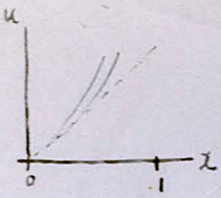
$x = e^t$. $li(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^t}{t}dt$.

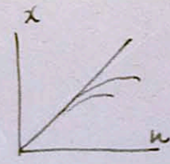
(4) $I = \iint e^{xy}dxdy$

$\left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{1}{x}e^{xy} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = \frac{\log_e(uv)}{u} \end{array}\right.$



$x = \sin\varphi$





$x = \sin u$

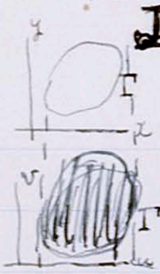
310972

1865952

$0 + \frac{a_{p-1}}{p} + 0 + \frac{a_p}{p+1} + 0$

$a_{p-1}\sum^{p-1} x R_i + a_p \sum^{p} x_k R_k + a_{p+1}\sum^{p+1} x_k$

III. Double integral



$I = \iint_{\Gamma} f(x,y)\,dx\,dy.$

$= \iint_{\Gamma'} du\,dv.$ (area) $\left[= \iint_{\Gamma} J\,dx\,dy\right]$

$\boxed{\text{ロヒア人 ce, Gertvanoff (1906)}}$

$u = x, \quad v = \int f(x,y)\,dy.$ 計算を要す

$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & f(x,y) \end{vmatrix}$

$= f(x,y)$

310972

6

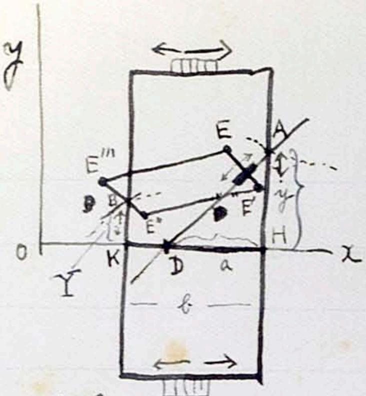
1865952

• p 偶数 ~~p 奇数~~

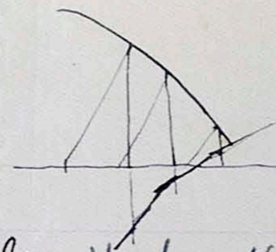
$0 + \frac{a_p}{p+1} + 0 \quad 0$

$\frac{a_{p-1}}{p}$ p 奇数 $0 \quad \cancel{+ \frac{a_{p+1}}{p+1}}$

$a_{p-1} \sum x^{p-1} R_k + a_p \cdot \sum x_k^p R_k + \cancel{a_{p+1} \cdot \sum x_k^{p+1}} R_k + \ldots$

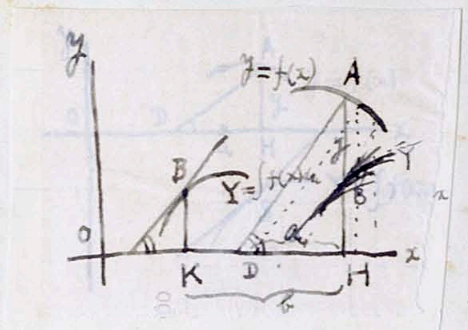


$$\begin{cases} AH = y \\ BK = Y \end{cases}$$



Stalle, Mathematische Instrumente.
Jacob, Calcul mécanique.

16. Integraph



Abdank-Abakanowicz (18 78 年 フランスに於て)

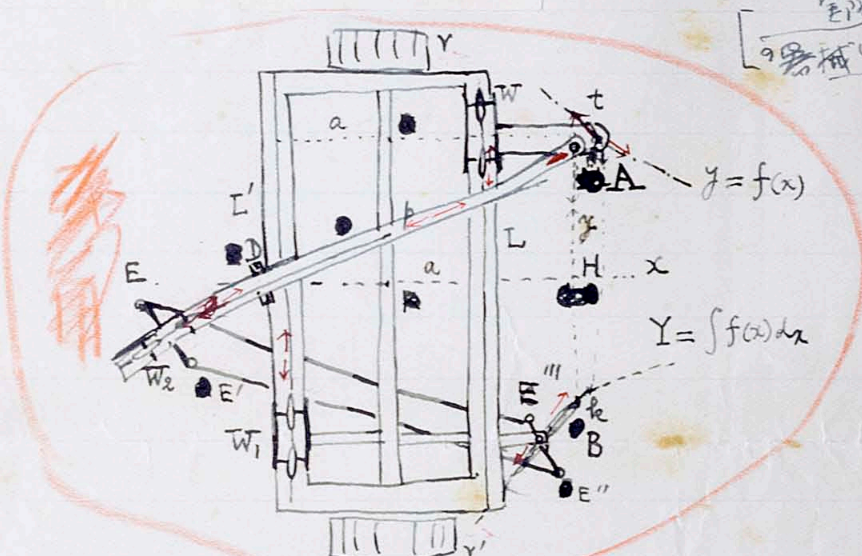
曲線 $y=f(x)$ が画かれてあるとき、一の曲線 $Y=\Phi(x)$ を画いて常に

$$\frac{dY}{dx} = tg\theta = \frac{y}{a}$$

(a は常数) ならしめれば、それは積分曲線である。

$$Y = \frac{1}{a}\int y\,dx$$

[a=1]
[一定の距離 b (=KH) をおかせる。]



[実際の器械では]

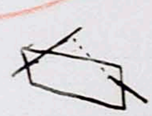
L, L' を $y=f(x)$ の y 軸に平行におく、車 Y, Y' は x 軸の方向に移動する。

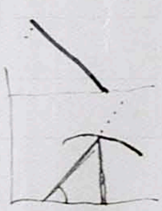
車 W　針 t は $y=f(x)$ の上を動く、

鉛筆 b は $Y=\int f(x)dx$ を画く、

p は方向線、その一端 A は支点 A で廻轉し得るやうに取付けられ、他の端は自由である。故に W 車が動けば軌條 p は方向を変へながら滑り軸受 D 内を滑る。

軸 ℓ は D に平行

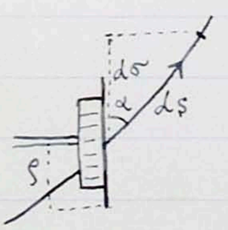




$$\frac{dY}{dx} = -\frac{1}{tg\theta} = -\frac{a}{y}. \qquad Y = -a\int\frac{dx}{y}.$$

車輪の廻轉に就いて。

滑らずに転がるものと假定する。



$$d\sigma = \rho\cdot d\omega. \qquad \sigma = \rho\omega.$$

しかるに σ は必ずしも車が実際進んだ路程ではない。それは車の平面と進路とが一致する場合に限る。（の方向）（の写影）（平面上への正射）

$$d\sigma = ds\cdot\cos\alpha$$

$$\rho\cdot d\omega = ds\cdot\cos\alpha$$

$\alpha = 90°$ ならば廻轉せずに移動する。

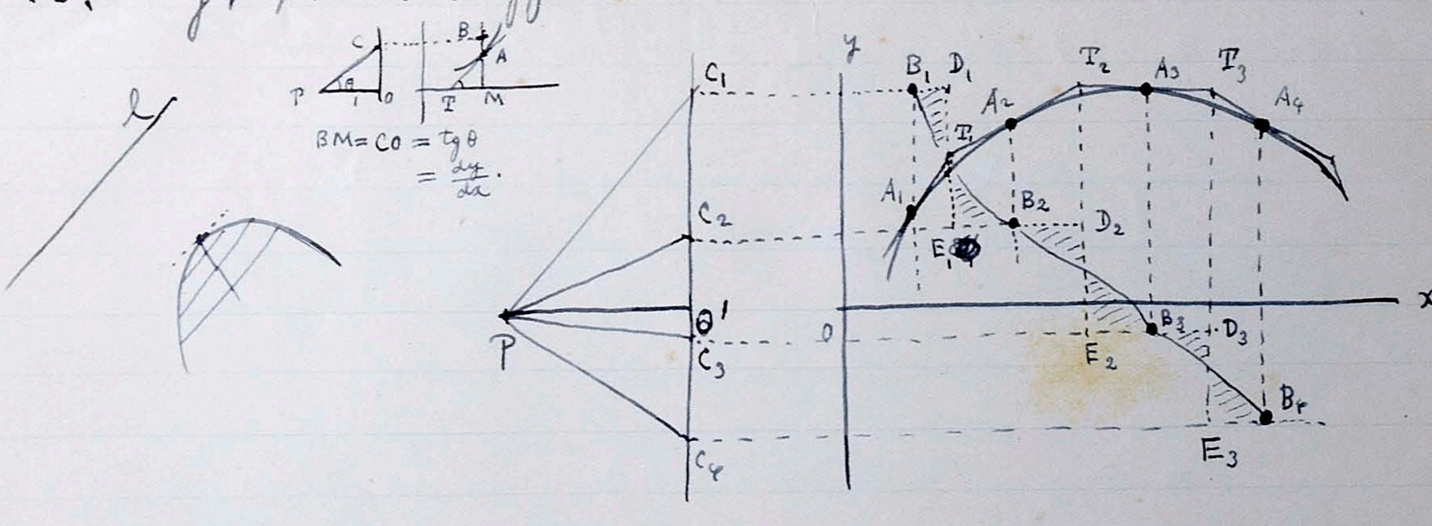
故に $\alpha = 0$ ならしめるためには、豫め軌道を作っておく（integraph、電車のレール）か、然らざれば大なる重さを適當に附する。等々

[Integraph に於て車 B の作り方は困難である。製作することは困難である。を精密に]

ω から s をおめんとする curvometer (measuring wheel)

[雨の日のタキシメーター　]

18. Graphical differentiation



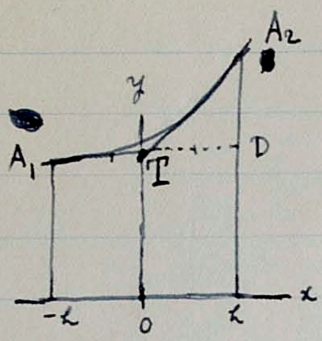
differential curve は

$B_1, B_2, B_3, B_4, \cdots$ を過ぎる.

<u>補正</u>　階段曲線を作り, integration の逆に, 三角形が互に等しくなるやうに curve を引くがよい.

(不用ナラン？)

$\Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 軸が y 軸に平行なる抛物線の性質

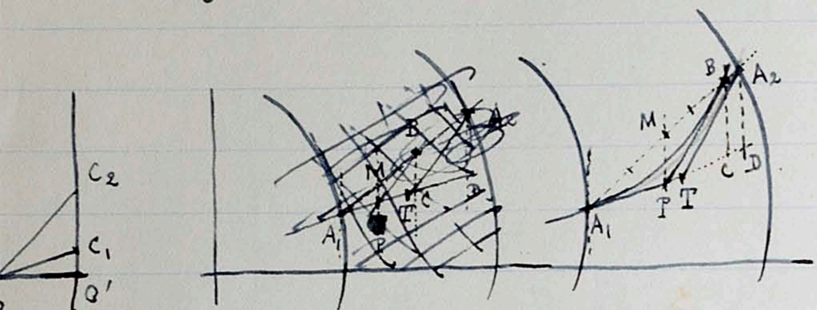


$\Phi'(x) = a_1 + 2a_2 x.$

A_1 に於ける切線 $y - \Phi(-h) = \Phi'(-h)(x+h)$ と y 軸との交点 T

T $(x=0,\ y = a_0 - a_2 h^2)$.

~~B~~ A_2 に於ける切線も同じ T で交る。



A_1A_2 を上の如き parabola と仮定する。

$$\frac{A_1B}{A_1A_2} = \frac{A_1P}{A_1T} = \frac{A_1C}{A_1D},\quad \therefore \frac{A_1P}{A_1C} = \frac{A_1T}{A_1D}$$

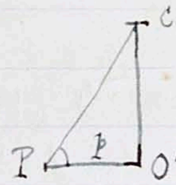
しかるに $\frac{A_1P}{A_1C} = \frac{1}{2}$ (近似的に B は A_2 に近いから) 故に $\frac{A_1T}{A_1D} = \frac{1}{2}$.

注意 I. 方向図に於て $PO' = p$ と取れば

$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$, $\tan\theta = \frac{c}{p}$ $f(x,y) = c$

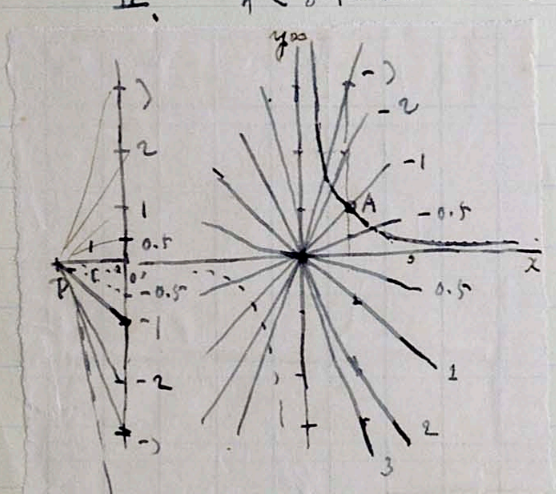
となるから, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p} f(x,y)$

となる。



但し方向図の縦線の単位を p に取って $\tan\theta = c$ とすべきである。

II. 積分曲線を (x_0, y_0) から出発して無窮遠まで延びた場合は, 他に積分曲線の分枝があっても, その分枝は書き得ない。~~故に~~ その場合は適当な変数の変換によって, 上の無窮遠点を有限距離にある点に微分方程式を変形して, 之を解(図)し, 次に最初の図に直すが ~~よい~~ を可とする場合がある



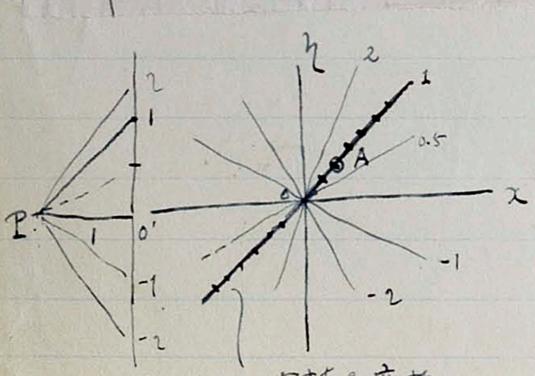
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \qquad (x_0 = 1,\ y_0 = 1). \qquad \left[\begin{array}{r}\text{双曲線}\\ xy=1\end{array}\right]$$

$$-\frac{y}{x} = c, \qquad y = -cx. \qquad [xy = a]$$

第三象限の分枝を画くために

$y = \frac{1}{\eta}$ とおけば $(x_0 = 1,\ \eta_0 = 1)$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\eta}{x} \qquad \frac{\eta}{x} = c. \quad \eta = cx.$$



solution は明かに

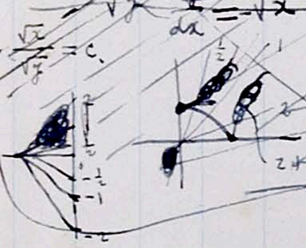
$\eta = x$ 故に $\frac{1}{y} = x$.

この分枝を(之に)変換する。

(iii) 或は特異点で曲線の止まる場合

$$-\sqrt{y}\,\frac{dy}{dx}=\sqrt{x} \qquad y^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=1$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=c,$$



$$\left(\begin{array}{l} x=0, \\ y=1 \end{array}\right)$$

画け無い.

第一近似積分曲線を等に[illegible]と交点 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に引ける。
等傾線の方向と出来るだけ垂直 ~~を[illegible]~~ (角又はそれに近い一つの直線) やうにξ軸を選びそれに垂直なる任意の直線をη軸とする。新しき座標軸について

existence proof.　Graphische Methoden (1915)

Successive approximation. Picard (1890) Runge

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta).$$

真の solut. $\eta = \eta(\xi)$, [$\xi = \xi_0$ のとき $\eta = \eta_0$]

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi[\xi, \eta(\xi)] \qquad \eta(\xi) = \eta_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi[\xi, \eta(\xi)]\, d\xi$$

first approximation を $\eta_1 = \eta_1(\xi)$ とし、$|\eta_1(\xi) - \eta(\xi)| \leq \varepsilon_1$ を first approximat. の誤差の限界とする。

次に
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi[\xi, \eta_1(\xi)].$$
の積分を $\eta_2(\xi) = \eta_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi[\xi, \eta_1(\xi)]\, d\xi$ とする

$$\eta_2 - \eta = \int_{\xi_0}^{\xi} \{\varphi[\xi, \eta_1(\xi)] - \varphi[\xi, \eta(\xi)]\}\, d\xi$$

しかるに

$$|\varphi(\xi, \eta_1) - \varphi(\xi, \eta)| \leq M \cdot |\eta_1 - \eta|$$
であるから [Lipschitz-condition]

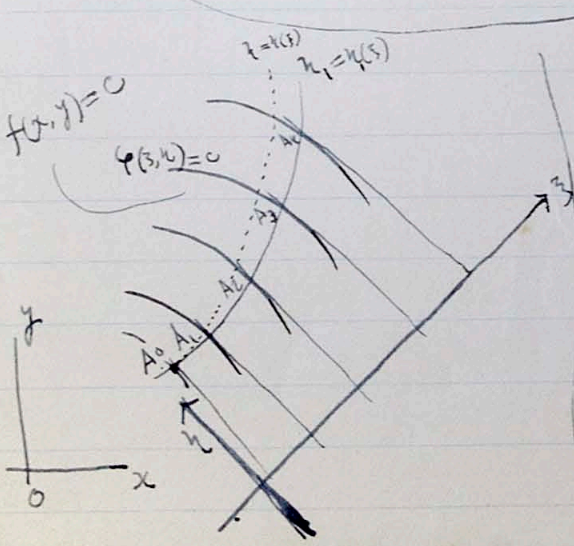
$$|\eta_2 - \eta| \leq \int_{\xi_0}^{\xi} |\varphi[\xi, \eta_1(\xi)] - \varphi[\xi, \eta(\xi)]|\, d\xi \leq \int_{\xi_0}^{\xi} |\eta_1(\xi) - \eta(\xi)| \cdot M\, d\xi$$
$$\leq \varepsilon_1 \cdot M \cdot |\xi - \xi_0|.$$

故に K を 1 より小なる正の定数とし、$|\xi - \xi_0|$ を十分小さく取って $M \cdot |\xi - \xi_0| < K$ なる様にせば: $\varepsilon_2 \leq K \varepsilon_1$.

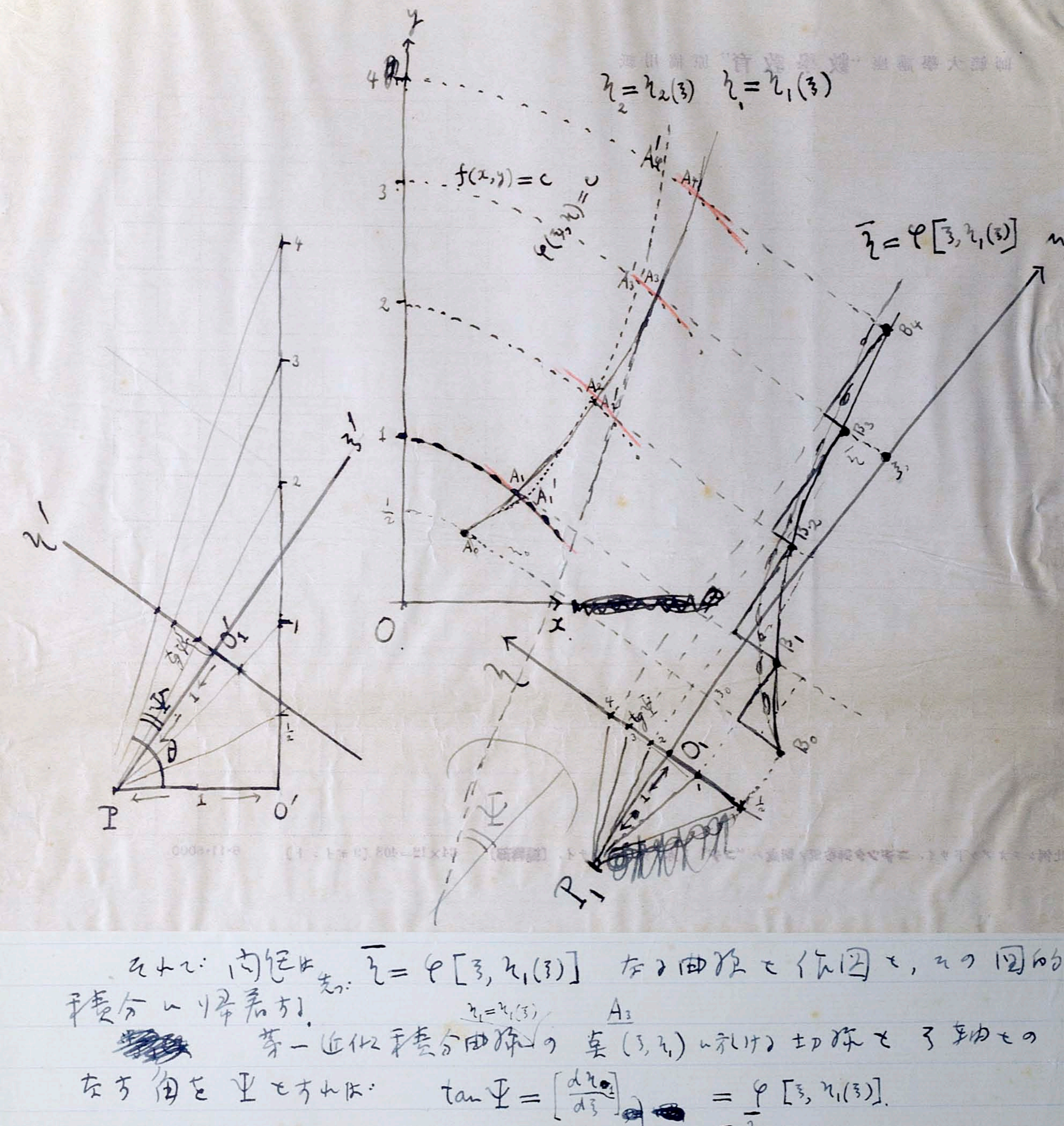
等傾曲線 $\varphi(\xi, \eta) = C$ の方向は $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}$.
假設によって $\frac{d\eta}{d\xi}$ の絶対値が大であるから、分母 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ は 0 に近い。
しかるに $|\eta_1 - \eta|$ は小なる値である [変数ξの領域が狭い向は (少くとも) $|\xi - \xi_0|$]
から
$$\left|\frac{\varphi(\xi, \eta_1) - \varphi(\xi, \eta)}{\eta_1 - \eta}\right| \leq M$$
なる定値 M が存在する。

故に吾れは $\eta_2 = \eta_2(\xi)$ を第二近似曲線として採用するを得る。

更に [ξ,η軸を変へないで], 第三近似曲線
$$\eta_3 = \eta_0 + \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi[\xi, \eta_2(\xi)]\, d\xi$$
に就ては、
$$|\eta_3 - \eta| \leq K \varepsilon_2$$
故に
$$\leq K^2 \varepsilon_1.$$
$$|\eta_{n+1} - \eta| \leq K^n \cdot \varepsilon_1 \to 0$$



x, y の或る領域内で: かくの如き ξ, η 軸が選び得るためには、f(x, y) が或る條件を満足する必要なるを要する。後に知るやうに、$\varphi(\xi, \eta)$ は Lipschitz condit. を満足するのである。



それで 問題は 先づ $\bar{\eta} = \varphi[\xi, \eta_1(\xi)]$ なる曲線を作図し，その図的積分に帰着する.

第一近似積分曲線 ($\eta_1=\eta_1(\xi)$) の点 A_3 (ξ, η_1) における切線と ξ 軸とのなす角を Ψ とすれば $\tan\Psi = \left[\frac{d\eta_1}{d\xi}\right] = \varphi[\xi, \eta_1(\xi)] = \bar{\eta}$.

しかるに $\eta_1=\eta_1(\xi)$ は $\left[\frac{d\eta_1}{d\xi}\right]_{\xi=\eta_1} = \varphi(\xi, \eta_1)$ の solution であるから

由て $\bar{\eta} = \varphi[\xi, \eta_1(\xi)]$ の作図.

$\boxed{20.}$ Some remarks on singularities of integral curves and singular solutions.

~~Integral curve の singularities.~~

Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930).

(1) Clairaut dif. eq.

$$y = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

等傾線 $y = cx + \varphi(c)$

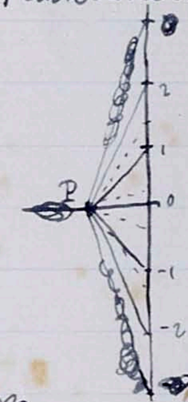
は直線で その方向は c.

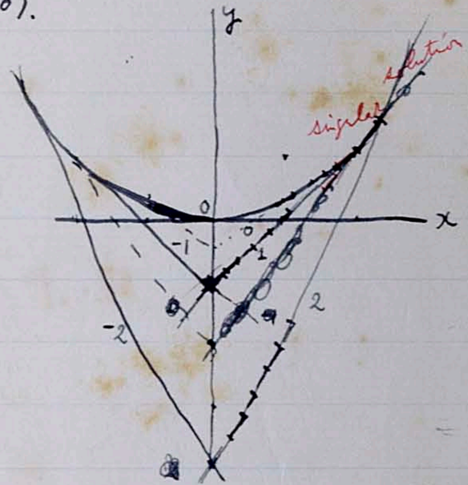
しかるに c は同じ方向の射線の方向であるから, 等傾線は積分曲線に一致する.

envelope は singular solut^n となる.

等傾線の

$$0 = x + \varphi'(c).$$





Ex. $y + \frac{dy}{dx}x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

$$\begin{cases} y + cx + c^2 = 0 \\ x + 2c = 0. \end{cases} \quad y = \frac{x^2}{4}$$

(nomogram)

一般の場合

二つの c の値が一致すれば 一般には cusp になる

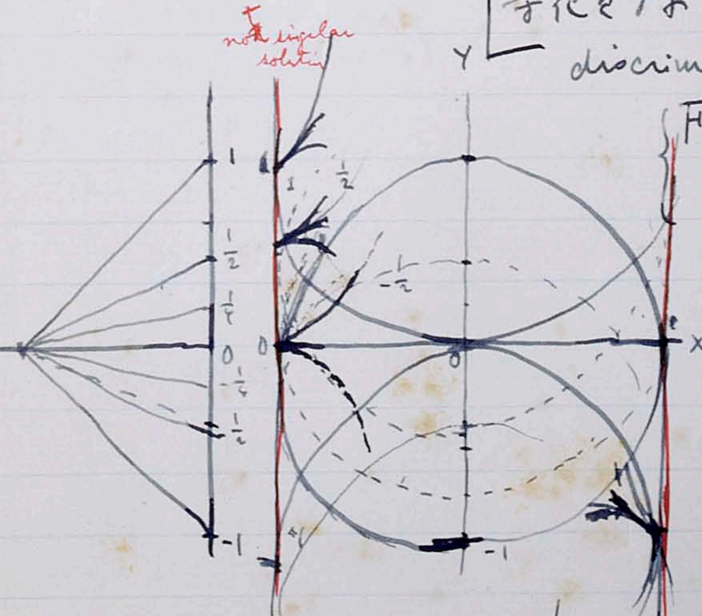
(2) discriminant curve. 判別曲線

等傾線が envelop を包む場合, その envelop を discriminant curve と呼ぶ; それは

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

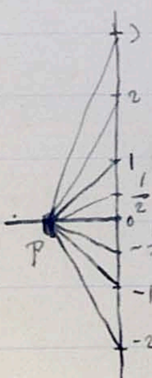
から c を消去して得られる.

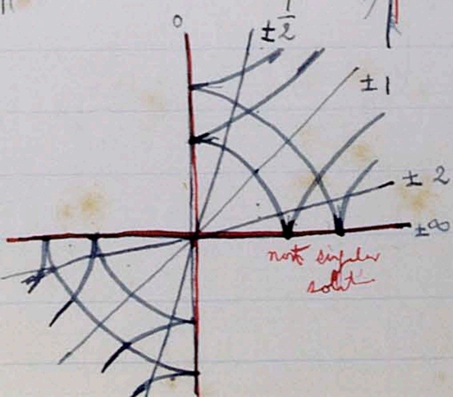
その曲線は, 一般に 積分曲線の cusp の locus. 等傾線が envelop に接する点が cusp になる.



Ex. 1. $x^2 + \left(y - \frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$ $\left[y = e^x\left[a \pm \int e^{-x}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]\right]$

円 $\begin{rcases} x^2 + (y-c)^2 = 1. \\ y - c = 0. \end{rcases}$ $x^2 = 1.$ cusp locus





Ex. 2. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0.$ $\left[(x^3+y^3-a)^2 - 4x^3y^3 = 0\right]$

直線 $\begin{rcases} c^2 y = x \\ cy = 0 \end{rcases}$ $\underline{y=0.}$

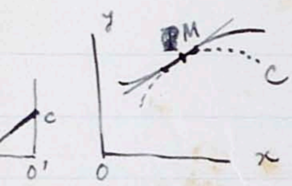
$\underline{x=0}$

cusp locus なれども, 等傾曲線の envelop ではない.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)-c=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right\}$$

(3) 積分曲線の変曲点 point of inflexion の locus.

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ の積分曲線の point of inflexion を M(x,y) とする。



その点では $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. $\left[\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.\right]$

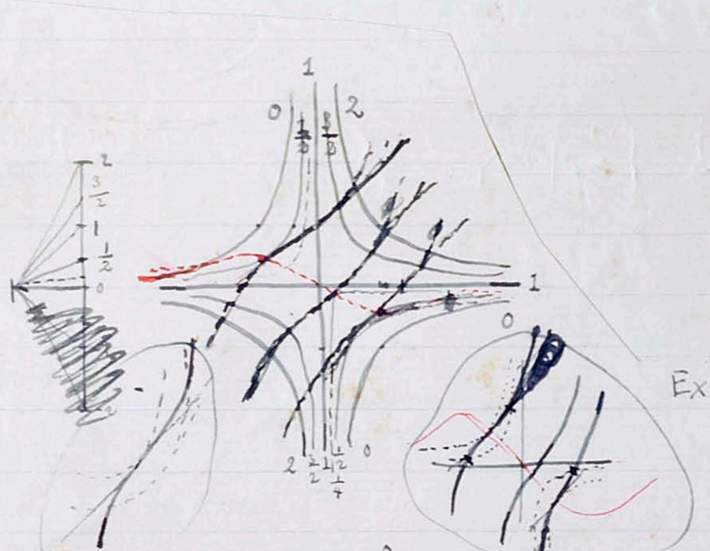
今点Pを通る等傾線 $f(x,y)=c$ の点Pに於ける切線の方向は $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$. 故に積分曲線はその変曲点に於て等傾線に接する。

由て一般に $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ の等傾曲線 c の上にある積分曲線の変曲点は、M(x,y)

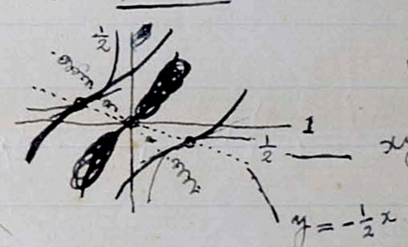
$F(x,y,c)=0$ [等傾線 c 上にある] {その方向 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$ の $\frac{dy}{dx}$ は c に等しい

$\frac{\partial F}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial F}{\partial y}=0$ [等傾線に接する $c=\frac{dy}{dx}$]

を満足する。故に変曲点の軌跡は この二式から c を消去して得られる。



$y+cx=0$. $y=-cx$



$\boxed{c=\frac{1}{2}}$ $xy=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

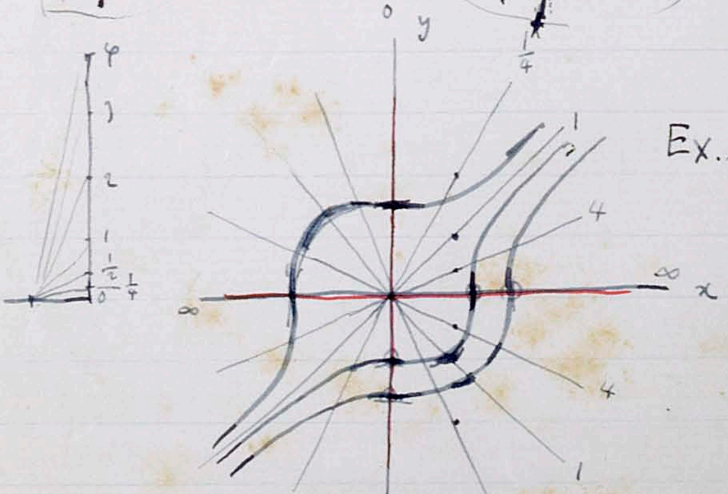
$y=-\frac{1}{2}x$

Ex. 1. $\frac{dy}{dx}=xy+1$ $\left[y=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx+a\right)\right]$

等傾線 $\left.\begin{array}{l} xy=c-1 \\ y+c\cdot x=0\end{array}\right\}$ $x^2y+x+y=0$ (I

$\downarrow$

$y=-\frac{x}{1+x^2}$



Ex. 2. [exception]

$y^2\frac{dy}{dx}-x^2=0$.

$[y^3-x^3=a]$

$\left.\begin{array}{l} y^2c-x^2=0 \\ -2x+c\cdot(2yc)=0.\end{array}\right\}$

$\downarrow$

$y=\pm\frac{x}{\sqrt{c}}$ $\sqrt{c}\,y=\pm x$

$c=\frac{x^2}{y^2}$. $c^2=\frac{x}{y}$. $\frac{x^4}{y^4}-\frac{x}{y}=0$

$y\neq0$ なるときは 分母を払… $xy\,(x-y)(x^2+xy$

$x(x-y)=0$.

$x=0$ or $x-y=0$ 故に $y=0$ を含…を与す

$x=0$, $y=0$ は inflexion point の locus でない。等傾線に接して居ない。

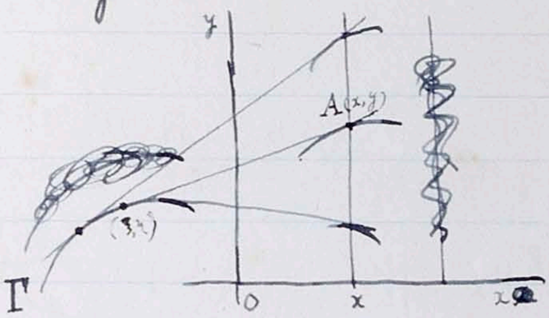
$(y-x)(\quad)=0$, $y^2\cdot\frac{y}{x}=x^2$, $y^3=x^3$. $cy^2=x^2$, $y^2=cx$

$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}c=0$.

21. Czuber's method of solution.

graphical ~~and~~ Mechanical solution ~~of linear dif. eq.~~

I. ~~Czuber's method~~ Czuber method: (1899)



$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

点 $A(x,y)$ を通る切線は

$$\eta - y = f(x,y)\cdot(\xi - x).$$

（ξ,η は切線上の流通座標）

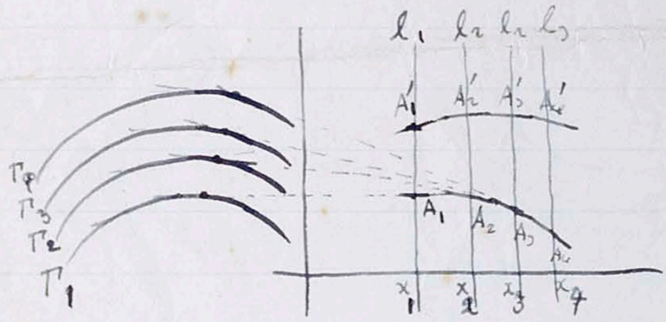
x を一定し, y の値を変じたとき, この切線の一群が包む envelope Γ を求める。それには y が parameter であるから, y について偏微分して

$$-1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi - x).$$

この二式から

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} \\ \eta = y - \dfrac{f(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}} \end{cases}$$

この間に y を消去すれば envelope Γ の方程式が得られる。即ちこれは y を parameter とする parameter eq. である [x を一定としたとき].



かくて l_1 即ち $x = x_1$ なる縦線に対応して Γ_1,
l_2 ... x_2 ... Γ_2; ... なる包線を得る。
これ等の曲線群を画く。　積分曲線の求め方, 切線.

この方法の便利な場合　~~Γ が y を含まぬ場合~~ Γ が一つの点に帰する場合, 即ち ξ 及び η が y を含まぬ場合　即ち $\dfrac{\partial f}{\partial y} = P(x)$　y について積分して $f(x,y) = P(x)\cdot y + Q(x)$.

$P(x)$, $Q(x)$ は x のみの函数

$$P \begin{cases} \xi = x - \dfrac{1}{P(x)} \\ \eta = -\dfrac{Q(x)}{P(x)}. \end{cases}$$

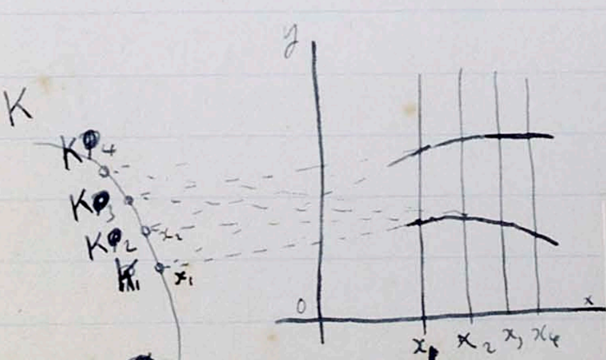
微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\cdot y + Q(x).$$

一般なる linear eq. (線形方程式).

(Leitkurve)

この場合に curve K は ~~x~~ x の値で目盛された一種の函数尺である。

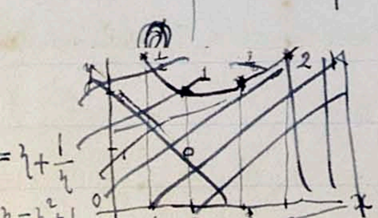


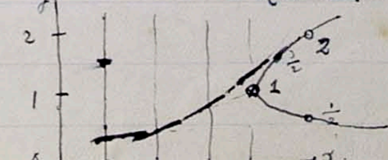
Ex. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^2$.　$P(x) = -x$, $Q(x) = x^2$.

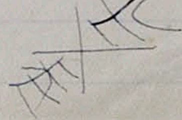
$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{1}{x} \\ \eta = x. \end{cases}$$

（双曲線 $\xi\eta = \eta^2 + 1$）　x が異なれば

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[a + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx\right.$$







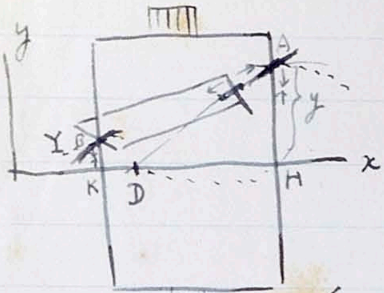
Pascal, I miei integrafi per equazioni differenziali (1914).

一つだけをやる。即ち linear dif. eq.

II. (Ernesto) Pascal の器械

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\cdot y + Q(x).$$

P(x), Q(x) が図で画かれてあると



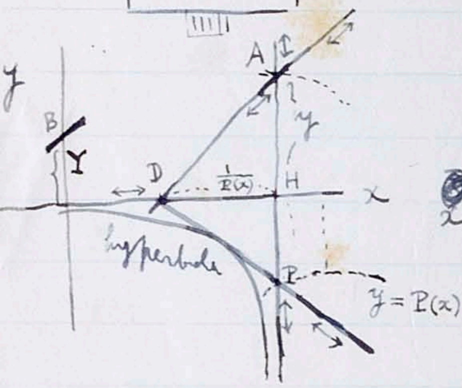
$\frac{dY}{dx} = \frac{y}{a}$. この a を一定せず、之を x の函数 $\frac{1}{P(x)}$ とするやうな装置を作れば、簡単の

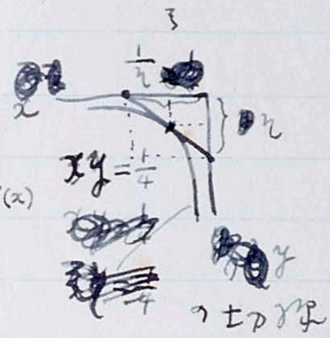
$\frac{dY}{dx} = P(x)\cdot y$. なる曲線を画くことになる。

之れは y(x) が与へられた場合には

$$Y = \int P(x)\cdot y(x)\,dx$$

即ち二つの funct. (graph) の積の積分を求める (graph) 器械である。





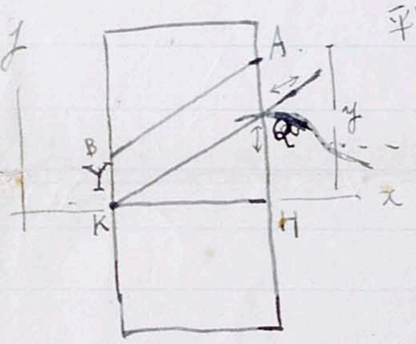
yz = 1

y 両方を求る。

$$z\cdot\frac{1}{z} = 1.$$

$\cancel{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$ $\cancel{z - y = -\frac{y}{x}(\xi - x)}$

$\cancel{z = 0}$ $\cancel{\xi = 2x}$

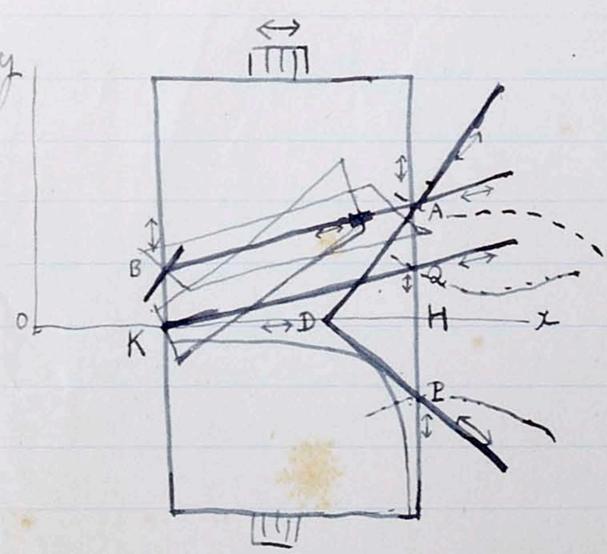


平行四辺形を作って

$$y - Y = \overline{QH} = \int^x Q(x)\,dx$$

とする。

$y = \int_0^x Q(x)\,dx$ [図的積分法によって画いて置く]



$$\frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dx} = Q(x).$$

$$\frac{dy}{dx} - P(x)\cdot y = Q(x).$$

点P, Q を夫々に それぞれ与へられた curve を画かせるとき、点 A は求める函数の y(x) を画く。

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x),$$

Pascal は Riccati, Bernoulli 等の dif. eq. を解く器械をも作った。

Pascal は $\int P(x)\cdot y(x)\,dx$ の考えから

$\varphi(t) = \int_0^x f(x)\,F(t-x)\,dx$ [integral equat. of Volterra type]

φ, F は与へられた函数, f(x) を求めること

を解く器械の可能性を注目した。

Integral ~~[illegible]~~ eq. の numerical soluti の一例は,

Whittaker, 日高 (中央気象台).

Pascal. Integral eq. of Volterra type.

$$\int_0^t f(x) \cdot F(t-x)\,dx = f(t) - \varphi(t)$$

φ, F は given fct.
$f(x)$ をおめること.

F は given なれば, 上の principle によって

$$F_1(t) = \int_0^t F(x) \cdot F(t-x)\,dx$$

(t に fixed value $t_0, t_1, t_2, \cdots$ を与えて.)

$$F_2(t) = \int_0^t F_1(x) \cdot F(t-x)\,dx$$

$$F_3(t) = \int_0^t F_2(x) \cdot F(t-x)\,dx$$

なる器械を作ることが出来る.

$$\cdots\cdots$$

$$\Phi(t-x) = F(t-x) + F_1(t-x) + F_2(t-x) + \cdots$$

とおくと, soluti は

$$f(t) = \varphi(t) + \int_0^t \varphi(x)\,\Phi(t-x)\,dx.$$

これも器械でかかる.

ロシア

Nomographic integration. Gercevanoff (1906[illegible])

(4) [Poincaré, Liouville J. (1881)] Liebmann [Encyk. d. Math. Wiss. geom. Theorie d. Differentialgleichungen]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + \cdots}{a_2 x + b_2 y + \cdots}$$

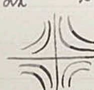
singular point $(x=0, y=0)$ の附近の積分曲線の状態.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$(x^2+y^2=a)$

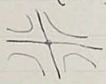
Wirbelpunkt (centre)

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$



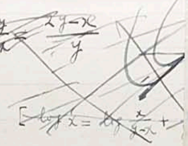
$(xy=a)$

Sattelpunkt (col)



$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$.

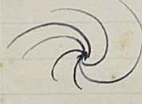
$y = ax^2$.



$\cancel{\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x}{y}}$

$\cancel{\log x = \ldots \frac{x}{y-x} + \ldots}$

Knotenpunkt (noeud)

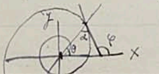


$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan\alpha + \frac{y}{x}}{1 - \tan\alpha \cdot \frac{y}{x}}.$$

logarith spiral $\sqrt{x^2+y^2} = a \cdot e^{\arctan\frac{y}{x} \cdot \cot\alpha}$

$(r = a\, e^{\theta \cdot \cot\alpha})$.

Strudelpunkt (foyer)



師範大學講座「數」

$\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1$

$\Delta = 0$		Knoten
$\Delta > 0$,	$a_1 b_2 - a_2 a_1 > 0$	Knoten
[illegible]	< 0	Sattel
< 0	$a_1 + b_2 \neq 0$	Strudel
< 0	$a_1 + b_2 = 0$	Wirbel

Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930)

二枚デ一頁デス。圖版挿入ノ個處ハ活字ニ比例シテオアケ下サイ。コヂック

算盤 — ローマ算盤 → 支那 (宋)　　割算九々 (二十三 [illegible])
{ 王文珠算「数学通軌」(1578) → 伊勢神宮文庫
「算法統宗」(1593)

第三章 Elements of numerical calculation.

24. 計算器 Calculating machine.

整数の加減乗除

Pascal (1642)　Leibniz (1671)　Thomas de Colmar (1820)

$\sqrt{a}$ の first approxim. 近似値を x_1.

$\sqrt{a} = x_1 + \xi_1$.　$a^2 = x_1^2 + 2x_1\xi_1 + \xi_1^2 \fallingdotseq x_1^2 + 2x_1\xi_1$　ξ_1 の近似値として

$\xi_1' = \dfrac{a - x_1^2}{2x_1}$ を採れば; $\sqrt{a}$ の second approximat. は

$$x_2 = x_1 + \xi_1' = \underline{x_1 + \frac{a - x_1^2}{2x_1}}$$

即ち $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$ で与へられる。之は計算器で計算すれば便利である。

Heron (時代不明 200 ?. 50?)　支那では「孫子算経」(紀元 80 年位よりは遅い。不明. 3世紀, 遅くとも 4 世紀?)

その誤差 ξ_2 は

$$\xi_2 = \sqrt{a} - x_2 = (x_1 + \xi_1) - (x_1 + \xi_1') = \xi_1 - \xi_1' = -\frac{\xi_1^2}{2x_1}$$

$$\therefore \left|\frac{\xi_2}{x_2}\right| = \left|\frac{\xi_1^2}{2x_1x_2}\right| \fallingdotseq \frac{1}{2}\left|\frac{\xi_1^2}{x_1^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\xi_1}{x_1}\right|^2.$$

即ち近似値的には, (second approx. の relative error は first approxim. の relative error の平方の半分に等しい.)

3rd approximat. $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$, ...

$\sqrt[p]{a}$ については, $x_2 = x_1 + \dfrac{a - x_1^p}{p\,x_1^{p-1}}$

代数的 (algebraic operat.) は計算器によって, いくらでも精密に計算出来る.

25. absolute and relative Errors.

$\boxed{\text{I.}}$ $f(a, b, c)$　functional form f は正確なものとし, a, b, c の代りに近似値 a', b', c' を用いるとき, それによって生ずる誤差の限界をおめる. $|a' - a| = \Delta a$, $|b' - b| = \Delta b$, $|c' - c| = \Delta c$, $|f(a', b', c') - f(a, b, c)| = \Delta$

higher order の誤差を省けば

$$f(a\ b\ c) - f(a'\ b'\ c') = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{\substack{a=a'\\b=b'\\c=c'}}(a - a') + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{\substack{a=a'\\b=b'\\c=c'}}(b - b') + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_{\substack{a=a'\\b=b'\\c=c'}}(c - c')$$

$$\Delta f \leqq A \cdot \Delta a + B \cdot \Delta b + C \cdot \Delta c.$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{\substack{a=a'\\b=b'\\c=c'}}\right| = A.$$

これは absolute error.

relative error

$z = xy$.　$\dfrac{\Delta z}{z} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}$

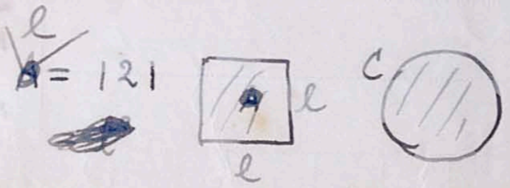
$z = \dfrac{x}{y}$　$\dfrac{\Delta z}{z} = \dfrac{\Delta x}{x} - \dfrac{\Delta y}{y}$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \leqq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

孫子算經（巻中, p.7）

$$\sqrt{234567} = 484 + \frac{311}{968} \quad \left(= 484 + \frac{234567 - 484^2}{2 \times 484}\right)$$

張邱建算經（巻中, p.19）



$\ell = 121$

$$C = \sqrt{12\,\ell^2} \quad (\pi = 3)$$

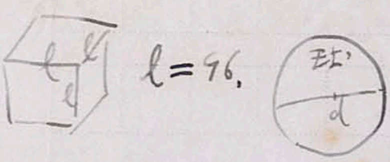
$\ell = 121$

$$C = \sqrt{175692} = 419 + \frac{131}{839}$$

$$\left[= 419 + \frac{a - x_1^2}{2a+1}\right]$$

$$\begin{cases} \ell^2 = \pi r^2 \\ C = 2\pi r \end{cases} \rightarrow C = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2}{\pi}} = \sqrt{4\pi\ell^2}.$$

張邱建算經（巻下, p.31）



$\ell = 96$,

$$V = \ell^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{3\times 8}{4\pi}\ell^3} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}\ell^3} = \sqrt[3]{1572864} = 116 + \frac{11968}{40369}$$

$$\left(\pi = \frac{27}{8} = 3.37\cdots\right)$$

$$\left[= 116 + \frac{11}{3a^2+1}\right]$$

John Perry, 不正確な計算

Ex. 1.

(1尺ぐらい)

一つの円の面積を 0.1 % 正しく測定したい。 $r \sim 30.5^{cm}$

ならば; 半径を どれだけ精密に } 取ればよいか。
また π 〃 〃

$\log A = 2\log r + \log\pi$

$A = \pi r^2$.

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \leqq \left|2\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| \leqq 0.001$$

$\pi = 3.141592\ldots$ $\pi = 3.1$ と取れば $\frac{\Delta\pi}{\pi} \fallingdotseq \frac{0.04}{3} = 0.01\ldots$

ならば relative error が 0.01 を超える。

$\pi = 3.14$ と取れば $\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| \fallingdotseq \frac{0.0016}{3.14} \fallingdotseq 0.0005$

この場合には $2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \leqq 0.0005$ 即ち $|\Delta r| \leqq 0.00025\,r$
$\fallingdotseq 0.0076$ cm

と取らねばならぬ。 これは容易に出来ないことである。なぜならば 1 mm の 10分の一 よりも
精密な測定を要するから。

由て $\pi = 3.142$ と取れば $\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| \fallingdotseq 0.00013$ となり
$|\Delta r| \leqq 0.00043\,r \fallingdotseq 0.013$ cm 0.1 mm だけ精密に取れば
十分である。

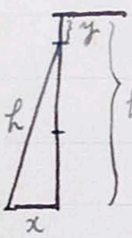
これ以上 π を精密に取っても、殆んど無意義である。 何となれば

$\pi = 3.1416$ と取れば $\left|\frac{\Delta\pi}{\pi}\right| \fallingdotseq 0.00007$

$|\Delta r| \leqq 0.00046\,r \fallingdotseq 0.014$ cm. 仮りに $\Delta\pi = 0$ としても

$2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \leqq 0.001$, $|\Delta r| \leqq 0.0005\,r \fallingdotseq 0.015^{cm}$

Ex. 2.



屋根の降下 $y = h - \sqrt{h^2 - x^2}$.

$h = 2.65^{m}$ $x = 5^{cm}$ $\sqrt{265^2 - 5^2}$ 大きな平方根の表がないとする。

$$y = h - h\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)^{\frac12} = h - h\left[1 - \frac12\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac18\left(\frac{x}{h}\right)^4\left(1 - \theta\frac{x^2}{h^2}\right)^{-\frac32}\right].$$

これは higher order これは 1 に近い

$$= \frac12\frac{x^2}{h} = 0.047169^{cm}$$

~~省略項~~ の 誤差の order は $\Delta y = \frac18\left(\frac{x}{h}\right)^4 \cdot h = \frac{x}{8}\left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac58\left(\frac{5}{265}\right)^3$

$< \frac58\left(\frac{1}{50}\right)^3$. $\Delta y \leqq 5\times10^{-6}$

$y = 0.04717$

若し x の値が近似値であって 5 mm以下の誤差あり 即ち 10 % 以下の誤差を含むもの
とせば:

$y = \frac{x^2}{2h}$ $\frac{\Delta y}{y} = 2\frac{\Delta x}{x}$ $\frac{\Delta x}{x}$ 10 % 以下.

故に y の relative error は 20 % 以下となる。由て
y の値として小数第3位は不確となる。 0.04717 ±94

$y = 0.05$ cm とすべきである。

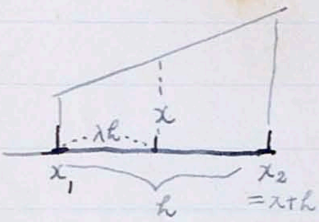
II. 近似の ~~値の誤差と f(x)~~

~~I. 数値値 x の不正確から来るもの.~~

~~$\Delta f \fallingdotseq f'(x)\Delta x$.~~

II → 表の使用から来る計算上の誤差

(1) linear interpolation（比例部分 proportional parts）



$$\frac{f(x_1+\lambda h)-f(x_1)}{\lambda h}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

$$f(x_1+\lambda h)=f(x_1)+\lambda\cdot[f(x_1+h)-f(x_1)]$$

$$\varepsilon = f(x_1+\lambda h)-f(x_1)-\lambda\cdot f(x_1+h)+\lambda\cdot f(x_1)$$

$$\fallingdotseq f(x_1)+\lambda h\cdot f'(x_1)+\frac{\lambda^2h^2}{2}\cdot f''(x_1)-f(x_1)$$

$$-\lambda\cdot f(x_1)-\lambda h\, f'(x_1)-\frac{\lambda h^2}{2}\cdot f''(x_1)+\lambda f(x_1)$$

$$|\varepsilon|=\left|\lambda(1-\lambda)\frac{h^2}{2}f''(x_1)\right|.$$

厳密なことは明に従い出づる場合がある

$\lambda(1-\lambda)$ の max. は $\lambda=\frac{1}{2}$ のときで: $\max=\frac{1}{4}$.

$$|\varepsilon| \leqq \frac{h^2}{8}\cdot|f''(x_1)|.$$

$(f''(x)=f''(x_1))$

(2) 四捨五入

表の製作上, $f(x_1)$, $f(x_1+h)$ の値は四捨五入されてゐるから, 誤差がある.
Δ_1 Δ_2 r 桁の表ならば: $\leqq \frac{1}{2}\cdot 10^{-r}$

$$\Delta' = \Delta_1+\lambda(\Delta_2-\Delta_1) = \Delta_1(1-\lambda)+\lambda\Delta_2 \quad \cancel{\Delta_1(1-\lambda)+\lambda\cdot\Delta_2}$$

~~Δ' は Δ_1 と Δ_2 の間にある.~~

しかるに, (2の上に) $f(x_1+\lambda h)$ 自身の四捨五入による誤差が, 2つ加はるから, 大きく見積れば, 全誤差は
$\leqq 10^{-r}$. ~~[誤差 10^{-r}]~~

$$\Delta < \frac{h^2}{8}|f''(x)| + 10^{-r}.$$

対数表の場合.

$f(x)=\log_{10}x$. $h=1$. $f''(x)=-\dfrac{\log_{10}e}{x^2}$

4桁 $100\leqq x\leqq 1000$
5桁 $1000\leqq x\leqq 10000$
7桁 $10000\leqq x\leqq 100000$

5桁 $\dfrac{h^2}{8}|f''(x)| < \dfrac{1}{8}\dfrac{0.4343}{1000^2} < 5\cdot 10^{-8}$.

4桁	5桁	7桁
$\Delta < 5\cdot 10^{-6}+10^{-4}$ ($\leqq 10^{-4}$)	$\Delta < 5\cdot 10^{-8}+10^{-5}$ ($\leqq 10^{-5}$) order について云へば	$\Delta < 5\cdot 10^{-10}+10^{-7}$ ($\leqq 10^{-7}$).

~~$x_1,\ x_1+h$~~

$f(x_1),\ f(x_1+h)$

Inverse interpolation $(x = x_1+\lambda h)$

(1)' $y = f(x) = f(x_1+\lambda h)$ が与へられ、λhを求めるとき、 x_1 は $\lambda = \dfrac{y-f(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}$

即ち $\lambda h = \dfrac{y-f(x_1)}{f(x_1+h)-f(x_1)}\cdot h \doteqdot \dfrac{y-f(x_1)}{f'(x_1)}$ とおくことになる。 しかるに

$y \doteqdot f(x_1)+\lambda h f'(x_1)+\dfrac{\lambda^2h^2}{2}f''(x_1)$, $\dfrac{y-f(x_1)}{f'(x_1)} \doteqdot \lambda h + \dfrac{\lambda^2h^2}{2}\dfrac{f''(x_1)}{f'(x_1)}$

であるから、inverse interpolat- による誤差は

$\lambda=\frac12$

$\varepsilon = \dfrac{\lambda^2h^2}{2}\dfrac{f''(x_1)}{f'(x_1)}$ | $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$

x_1 h x_2

$\lambda \le \frac12$ ならば x_1 から
$\lambda \ge \frac12$ 〃 x_2 から interpolate すれば、 ε の max.

は $\lambda=\frac12$ のとき起こる。 $|\varepsilon| \le \dfrac{h^2}{8}\left|\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right|$.

対数表 $1000 < x < 1000$ (?)

$|\varepsilon| \le \dfrac{h^2}{8}\left|\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right| = \left|\dfrac{1}{8x}\right|$

$< \dfrac{1}{8\cdot1000}$ 5桁

$= 0.000125$

(2)' 四捨五入 $\left\{\begin{matrix} f(x_1) & \Delta_1 \\ f(x_1+h) & \Delta_2 \end{matrix}\right.$ $\Delta_1(1-\lambda)+\lambda\Delta_2$

~~$\lambda h \doteqdot \dfrac{y-f(x_1)}{f'(x_1)}$~~

$\Delta' \le \dfrac{1}{|f'(x)|}\cdot\left|\ \ \right| \le \dfrac12\cdot\dfrac{10^{-r}}{|f'(x)|}$

(2の誤差は略す。) 五桁の対数 $\Delta' \le \frac12\ \dfrac{10^{-5}\cdot x}{0.4343} \le \dfrac12\ \dfrac{10^{-1}}{0.4343} \approx 0.1$

表の relative error を求めることは極めて困難なことであり、人によって考え方も一致せず (?)

III、対数表の relative error.

r桁の場合、極めて大きく見積って $\Delta y = 2\cdot10^{-r}$ [$1\cdot10^{-r}$]

$y=\log_{10}x$

$\Delta y = \dfrac{\Delta x}{x}\log_{10}e$ $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{2\cdot10^{-r}}{0.4343} \doteqdot 5\cdot10^{-r}$ (四桁ならば $\dfrac{\Delta x}{x}=0.0005$)

Δy の max.

見方によっては [$\doteqdot 0.0003$] 0.03%

IV、計算尺

~~対数図表~~

単位の長さが l mm ならば、数値 y は ly mm の長さである。目盛で読み得る minimum distance を Δs mm と称し、$y=f(x)$ の変化として その尺(又は図)の上で読み得る最小値を Δy は: $\Delta s = l\cdot\Delta y$

$l = 125^{mm}$ $\Delta s = 0.1^{mm}$ [$=0.15^{mm}$]

Δs

$\Delta y = \dfrac{0.1}{125} = 0.008$ $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{0.008}{0.4343} = 0.0018$ ($\doteqdot 0.002$)

対数尺では

四桁の対数表は計算尺の10倍の精密さ (?) を有する。 [$\doteqdot 0.003$ 0.3%]

$\Delta y = \dfrac{\Delta s}{l}$ Δy は単位の長さ (l mm) が与へられたとき、その目盛尺で y の値を読むときの誤差の限界と解釈し得る

特に $y=\log_{10}x$ ならば: $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{x}\cdot\log_e x$. $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{\log_{10}e}\cdot\dfrac{\Delta s}{l}$

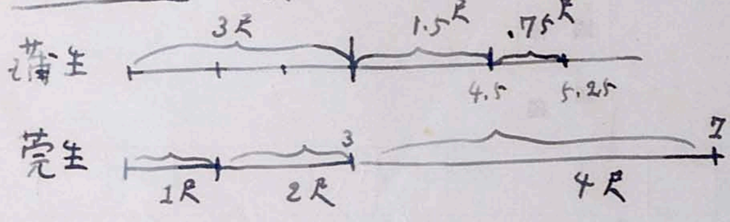
対数尺で目盛 x を読む場合、読みの relative error は、一定 (x に無関係である)

図では $\Delta s = 0.2^{mm}$ relative error 0.3%

九章算術（263注）
秦 −200 以前から。

イレド，アラビヤ，
近世ヨーロッパ。

盈不足　(p. 6)



$x_1 = 2$ 日　不足 $(-1.5$ 尺$)$

$x_2 = 3$ 日　余 $(+1.75)$

$\boxed{y=0}$　$h=1$,

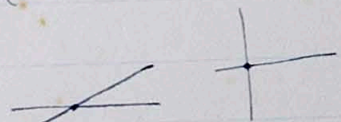
$$\lambda = \frac{0-(-1.5)}{1.75-(-1.5)} = \frac{1.5}{3.25} = \frac{6}{13}$$

linear equat. で仮定しての solut.

$$x = 2\frac{6}{13} \text{ 日}$$

$$\begin{cases} y = 3\left(1+\frac{1}{2}\right)^{x-1} \\ y = 1\,(1+2)^{x-1} \end{cases} \qquad 2^{x-1} = 3, \qquad x = 2.5\ldots \text{日}$$

式の精密さの研究に比すれば、図形（作図）の精密さ
の研究は、全くおくれて居る、軽視されてゐる。Lemoine の
Géométrographie　（直線の数、円の数、最も簡単な数に reduce する事など）。
などでは不十分である。



Klein の主張,

Elementarmathematik,
Bd. III.

第三表

無用

$M(x) = 5{,}83$ 中央値 $=6$
$M(Y) = 5{,}07$ 優勢 $=5$

父ノ小供ノ表 X

息子ノ小供ノ表 Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	M
0	$\overset{5}{25}$	$\overset{8}{20}$	$\overset{7}{15}$	$\overset{14}{10}$	$\overset{18}{5}$	$\overset{2}{0}$	$\overset{2}{5}$	$\overset{3}{10}$	$\overset{8}{15}$	$\overset{3}{20}$	$\overset{4}{25}$	$\overset{4}{30}$						5.54
1	$\overset{3}{20}$	$\overset{3}{16}$	$\overset{6}{12}$	$\overset{5}{8}$	$\overset{8}{4}$	$\overset{8}{0}$	$\overset{6}{4}$	$\overset{5}{8}$	$\overset{4}{12}$		$\overset{2}{20}$		$\overset{1}{28}$					5.65
2	$\overset{7}{15}$	$\overset{5}{12}$	$\overset{6}{9}$	$\overset{13}{6}$	$\overset{12}{3}$	$\overset{12}{0}$	$\overset{12}{3}$	$\overset{6}{6}$	$\overset{5}{9}$	$\overset{4}{12}$	$\overset{2}{15}$	$\overset{1}{18}$	$\overset{1}{21}$					5.62
3	$\overset{5}{10}$	$\overset{10}{8}$	$\overset{13}{6}$	$\overset{11}{4}$	$\overset{17}{2}$	$\overset{13}{0}$	$\overset{13}{2}$	$\overset{12}{4}$	$\overset{10}{6}$	$\overset{4}{8}$	$\overset{1}{10}$	$\overset{2}{12}$	$\overset{1}{14}$					5.68
4	$\overset{4}{5}$	$\overset{16}{4}$	$\overset{18}{3}$	$\overset{24}{2}$	$\overset{23}{1}$	$\overset{5}{0}$	$\overset{18}{1}$	$\overset{10}{2}$	$\overset{7}{3}$	$\overset{8}{4}$	$\overset{1}{5}$	$\overset{5}{6}$	$\overset{2}{7}$	$\overset{1}{8}$			$\overset{1}{11}$	5.65
5	$\overset{9}{0}$	$\overset{8}{0}$	$\overset{11}{0}$	$\overset{14}{0}$	$\overset{16}{0}$	$\overset{12}{0}$	$\overset{16}{0}$	$\overset{12}{0}$	$\overset{2}{0}$	$\overset{5}{0}$	$\overset{8}{0}$	$\overset{6}{0}$	$\overset{3}{0}$		$\overset{2}{0}$			6.22
6	$\overset{3}{5}$	$\overset{4}{4}$	$\overset{10}{3}$	$\overset{16}{2}$	$\overset{13}{1}$	$\overset{11}{0}$	$\overset{11}{1}$	$\overset{10}{2}$	$\overset{10}{3}$	$\overset{1}{4}$	$\overset{2}{5}$	$\overset{2}{6}$	$\overset{1}{7}$					5.66
7	$\overset{5}{10}$	$\overset{6}{8}$	$\overset{8}{6}$	$\overset{7}{4}$	$\overset{10}{2}$	$\overset{14}{0}$	$\overset{11}{2}$	$\overset{12}{4}$	$\overset{4}{6}$	$\overset{7}{8}$	$\overset{1}{10}$	$\overset{1}{12}$						5.87
8	$\overset{3}{15}$	$\overset{5}{12}$	$\overset{4}{9}$	$\overset{15}{6}$	$\overset{14}{3}$	$\overset{7}{0}$	$\overset{10}{3}$	$\overset{8}{6}$	$\overset{4}{9}$	$\overset{2}{12}$	$\overset{2}{15}$	$\overset{1}{18}$			$\overset{1}{27}$			5.69
9	$\overset{1}{20}$	$\overset{6}{16}$	$\overset{5}{12}$	$\overset{4}{8}$	$\overset{5}{4}$	$\overset{5}{0}$	$\overset{8}{4}$	$\overset{5}{8}$	$\overset{4}{12}$	$\overset{3}{16}$	$\overset{3}{20}$	$\overset{1}{24}$						5.56
10	$\overset{2}{25}$	$\overset{3}{20}$	$\overset{4}{15}$	$\overset{3}{10}$	$\overset{2}{5}$	$\overset{5}{0}$	$\overset{4}{5}$	$\overset{6}{10}$	$\overset{4}{15}$	$\overset{3}{20}$	$\overset{1}{25}$	$\overset{1}{30}$	$\overset{1}{35}$					6.02
11	$\overset{1}{30}$	$\overset{1}{24}$	$\overset{1}{18}$	$\overset{4}{12}$	$\overset{2}{6}$	$\overset{1}{0}$	$\overset{1}{6}$	$\overset{2}{12}$	$\overset{1}{18}$	$\overset{1}{24}$								5.33
12			$\overset{2}{21}$	$\overset{2}{14}$	$\overset{2}{7}$		$\overset{1}{7}$	$\overset{1}{14}$	$\overset{1}{21}$	$\overset{2}{28}$		$\overset{1}{42}$						6.67
13	$\overset{1}{40}$			$\overset{1}{16}$	$\overset{3}{8}$		$\overset{1}{8}$	$\overset{1}{16}$	$\overset{1}{24}$	$\overset{1}{32}$		$\overset{1}{48}$		$\overset{1}{64}$				7.27
14		$\overset{1}{36}$				$\overset{1}{0}$					$\overset{1}{45}$							6.33
15			$\overset{1}{30}$					$\overset{1}{20}$			$\overset{1}{50}$							7.33
16									$\overset{1}{33}$	$\overset{1}{44}$								9.5
M'	4.55	4.76	5.12	4.98	4.70	5.11	5.19	5.62	5.00	5.98	5.~~78~~ 31	~~5.31~~ 4.97	~~4.17~~ 3.50	~~3.50~~ 8.50	~~8.50~~ 6.50		4	

$M(x) = 5.8$
$M(Y) = 5.07$

無用

I								
11	20	30	4	10	12	7	64	27
22	48	24	56	10	12	35		
30								
32								
20								
6								
7								
8								
	20	33	44	50	48			

+1617

間アケル

II				
13	32	30	16	15
20	28	48	48	50
57				
20				
10				
12				
14				
24	16	30	36	40

−1503

III.				
23	48	54	64	20
34	44	78		
36	78	54		
~~23~~	40	72	160	125
32				
90	140	105		

+1700

IV						
18	20	21	32	5	30	8
26	48	60				
						11
10	30	120	60	100	120	

−1227

RR'. 子ノ小供ノ表ヲ知リテ、ソノ父ノ子供ノ数ヲ求ムル公式.

$$X-5{,}83=\frac{0{,}599}{(3{,}14)^2}(Y-5{,}07).$$

CC'. 父ノ小供ノ表ヲ知リテ

$$Y-5{,}07=\frac{0{,}599}{(2{,}91)^2}(X-5{,}83).$$

$N=1000.$

$$p'=\frac{1617+1700-1503-1227}{1000}$$

$p' = 0.587.$

$\bar{\xi}\bar{\eta} = \cancel{(5.83-6)(5.07-5)}$
$= -0{,}012$

ココカラ下 無用

マタ $\sigma_{(x)} = 2{,}91$ $\sigma_{(Y)} = 3{,}14$ $\therefore p = 0{,}599$ $\rightarrow r = 0{,}06\,6$

49.

第一. 先ヅ $\eta_{(x,y)}=0$, $\eta_{(y,x)}=0$ ナル場合ヲ考ヘテ見ン。

コノ場合ニハ ( ) 式ハ

$$-r^2=\frac{\delta_{(x)}^2}{\sigma_{(x)}^2},\qquad -r^2=\frac{\delta_{(y)}^2}{\sigma_{(y)}^2}$$

一般ニ 今左辺ハ負数 右辺ハ正数トナルカラ, 之ガ成立ツ為メニハ r ト $\delta_{(x)}$ トガ同時ニ零トナラネバナラナイ. 然シテ $\delta_{(x)}$ ガ零ナル為メニハ, 其ノ定義 ( ) カラ明カナル様ニ, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots \delta_n$ ガ皆同時ニ零デアル, 従テ M_1 ト A_1, M_2 ト A_2, ... トハ皆同時ニ一致セナケレバナラナイ. ソレ故ニ 点 M_1, M_2, ... ハ 一ツノ直線(横ノ最小偏差線)ノ上ニ在ルコトニナル. 同様ニ M_1', M_2', ... ハ 他ノ一ツノ直線(縦ノ　　)ノ上ニ在ル. 換言スレバ, 第二ノ式カラ 二ツノ回帰曲線ガ共ニ直線トナリ, 而モ其ノ上ニ $r=0$ トナル. 由テ 相関関係ハ存在セナイ.

逆ニ, 相関関係ガ存在セナイ場合ニハ, $r=0$ デアル. ソノ上ニ 二ツノ回帰曲線モ又二ツノ最小偏差線モ共ニ, X, Y 軸ニ平行ナル直線トナルカラ, M_1 ト A_1, M_2 ト A_2, ..., M_1' ト A_1', ... トハ夫々一致スル. 故ニ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_1', \delta_2', \dots$ ハ皆零トナリ, 従テ $\delta_{(x)}=\delta_{(y)}=0$. 由テ ( ) ヨリ $\eta_{(x,y)}=0$, $\eta_{(y,x)}=0$.

故ニ 相関関係ガ存在セナイ為メニ必要ニシテ且ツ十分ナル条件ハ, 二ツノ相関比ガ共ニ零トナルコトデアル.

一ツノ相関比 $\eta_{(x,y)}$ ガ零 ~~$\eta_{(y,x)}$ ガ零~~ ナル為メニ必要ニシテ且ツ十分ナル条件ハ, $r=0$ デアツテ且ツ 回帰曲線 RR' ガ横ノ最小偏差線ト一致スルコトデアル.

50. 次ニ 定義ノ式 ( ) $\eta_{(x,y)}=\sqrt{1-\frac{\tau_{(x)}^2}{\sigma_{(x)}^2}}$ カラ,

$$0\leqq \eta_{(x,y)}\leqq 1,\qquad 0\leqq \eta_{(y,x)}\leqq 1.$$

ナルコトヲ知ル.

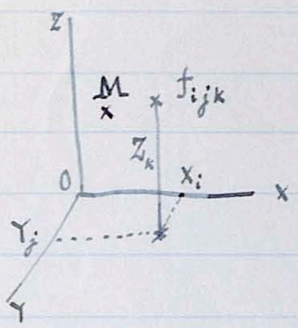
今 $\eta_{(x,y)}=1$, ~~$\eta_{(y,x)}=1$~~

ナル場合ヲ考ヘヤウ. コノ場合ニハ

$\tau_{(x)}=0$, ~~$\tau_{(y)}=0$~~.

Korrelation zwischen mehr als zwei Variablen.

三変数ノ場合.



中心ヲ $M_{(x)}$, $M_{(y)}$, $M_{(z)}$ トシ,

$\xi = X - M_{(x)}$, $\eta = Y - M_{(y)}$, $\zeta = Z - M_{(z)}$

トオク.

$$\Sigma f\left[\xi - (a + b\eta + c\zeta)\right]^2 = \min.$$ ナラシムベキ平面ヲ求メン.

a ニツキテ偏微分スレバ,

$$\Sigma f\xi - a\Sigma f - b\Sigma f\eta - c\Sigma f\zeta = 0.$$

ここニ $\Sigma f\xi = 0$, $\Sigma f\eta = 0$, $\Sigma f\zeta = 0$ ナレバ, $a = 0$ ナラザルヲ得ズ.

故ニ

$$\Sigma f\left[\xi - (b\eta + c\zeta)\right]^2 = \min.$$

$$\Sigma f\eta\left[\xi - (b\eta + c\zeta)\right] = 0, \qquad b\Sigma f\eta^2 + c\Sigma f\eta\zeta = \Sigma f\xi\eta,$$

$$\Sigma f\zeta\left[\xi - (b\eta + c\zeta)\right] = 0, \qquad b\Sigma f\eta\zeta + c\Sigma f\zeta^2 = \Sigma f\xi\zeta.$$

$$b = \frac{\Sigma f\xi\eta \cdot \Sigma f\zeta^2 - \Sigma f\xi\zeta \cdot \Sigma f\eta\zeta}{\Sigma f\eta^2 \cdot \Sigma f\zeta^2 - (\Sigma f\eta\zeta)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{\Sigma f\xi^2}}{\sqrt{\Sigma f\eta^2}} \cdot \dfrac{\Sigma f\xi\eta}{\sqrt{\Sigma f\xi^2}\cdot\sqrt{\Sigma f\eta^2}} - \dfrac{\sqrt{\Sigma f\xi^2}}{\sqrt{\Sigma f\eta^2}} \cdot \dfrac{\Sigma f\xi\zeta}{\sqrt{\Sigma f\xi^2}\sqrt{\Sigma f\zeta^2}} \cdot \dfrac{\Sigma f\eta\zeta}{\sqrt{\Sigma f\eta^2}\sqrt{\Sigma f\zeta^2}}}{1 - \left(\dfrac{\Sigma f\eta\zeta}{\sqrt{\Sigma f\eta^2}\cdot\sqrt{\Sigma f\zeta^2}}\right)^2}$$

故ニ

$$b = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}.$$

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{\Sigma f\xi^2}}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{\Sigma f\eta^2}}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_3 =$$

$$r_{12} = \frac{\Sigma f\xi\eta}{N\cdot\sigma_1\sigma_2}, \quad r_{13} = \frac{\Sigma f\xi\zeta}{N\cdot\sigma_1\sigma_3}, \ldots$$

同様ニ

$$c = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}.$$

故ニ

$$\xi = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\,\eta + \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\,\zeta.$$

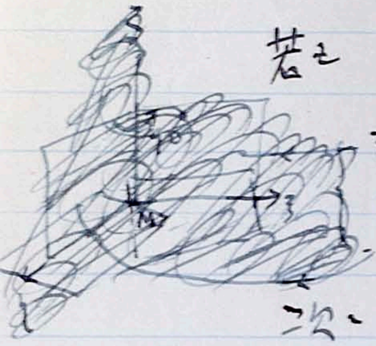
同様ニ

$$\eta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{r_{12} - r_{23}r_{13}}{1 - r_{13}^2}\,\xi + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\,\frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{1 - r_{13}^2}\,\zeta.$$

$$\bar{r}_{12} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}\right)} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}.$$

partielle Korrelations-koeffizient.

同様ノ公式ガ $\bar{r}_{13}$, $\bar{r}_{23}$ ニ対シテモ成立ス.



若シ $\bar{r}_{12}=0$ ナルトキハ

$\xi = c\,\zeta$
$\eta = c'\,\zeta$ トナルカラ, ξ ト η トノ間ニハ Korrelation ガ存在セズ

次ニ $\bar{r}_{12}^{2} = 1$ ナルトキハ ($\zeta=0$ トオケバ 即チ $\zeta=0$ ナル平面ノ場合ハ)

$\xi = A\,\eta$
$\eta = A'\,\xi$
$\left(\xi = \frac{1}{A'}\eta\right)$

$AA' = \bar{r}_{12}^{2} = 1$ トナルカラ, コノ二ツノ直線ハ相重ナル.

B、英国ノ或ル地方デノ 20年間ノ統計.

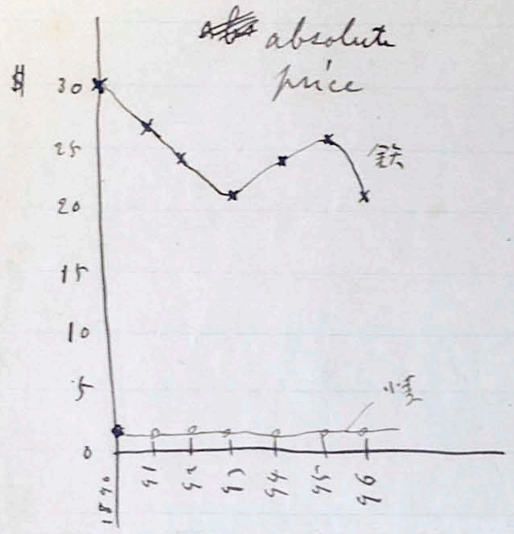
X 牧草ノ収穫. (一エーカー ニ付キ ポンド)
Y 春ノ雨量 (インチ)
Z 春ニ 42°F 以上ノ累積温度ノ和.

$M(x) = 28{,}02$ $\quad r_{12} = +0{,}80$
$M(y) = 4{,}91$ $\quad r_{13} = -0{,}40$
$M(z) = 594$. $\quad r_{23} = -0{,}56$

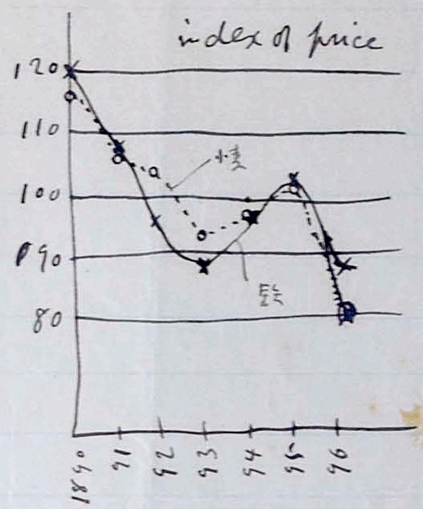
$\xi = 3{,}37\,\eta + 0{,}00373\,\zeta$
$\eta = 1{.}71\,\xi - 0{,}0038\,\zeta$
$\zeta = 2{.}51\,\xi - 0{,}50\,\eta$

故ニ収穫ト雨量ノ間ニハ 正ナル Korrelation アリ.
雨量ト温度 負

$\bar{r}_{12} = +0{,}76$
$\bar{r}_{13} = +0{,}10$ $\quad \bar{r}_{23} = -0{,}44$



(小麦ノ価ニハ変化見ヘズ)



鉄ト小麦ノ代価ノ変動ノ間ニ著シキ類似ヲ見ル。

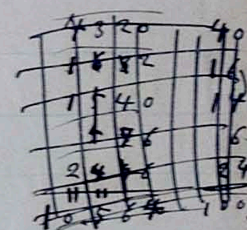
経済学ニ於テハ幾ツカノ代表物 米，ワタ，鉄，木材，…等ノ平均的指数 average index ヲ作ルヲ要ス。コレニヨツテ一般ノ価格ノ標準ヲ示スコトヲ

アメリカノ実例。

	Price index 小麦 Wheat	綿 cotton	鉄 steel	材木 lumber	トウモロコシ corn	毛 wool	皮 leather	平均
1880	101	120	104	108	103	92	104	104
81	97	90	102	103	97	99	102	99
82	95	82	94	100	96	110	96	96
83	102	108	99	90	100	100	98	100
84	105	100	101	99	104	99	100	100

コノ外ニ消費者ノ指数 consumers' index ナルモノアリテ，生活費ヲ計ル目的ニ用フ。即チ消費サレタ物資ノ量ヲ考ヘニ入レテ，平均ヲトル。

f	40		16		14		6		24		
物	食物 Food		家賃 rent		衣服 clothing		燃料 照明 fuel and light		雑費		消費者指数
	index	消費高	index								
1891	108	43.20	102	16.32	110	15.40	96	5.76	104	24.96	106
1892	99	39.60	100	16.00	101	14.14	101	6.06	101	24.24	100
1893	93	37.20	98	15.86	89	12.46	103	6.18	95	22.80	94



$40+16+14+6+24=100.$

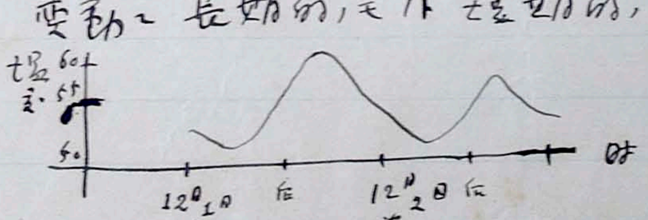
$$\frac{40\times108+16\times102+110\times14+6\times96+24\times104}{5\times100}=106.$$

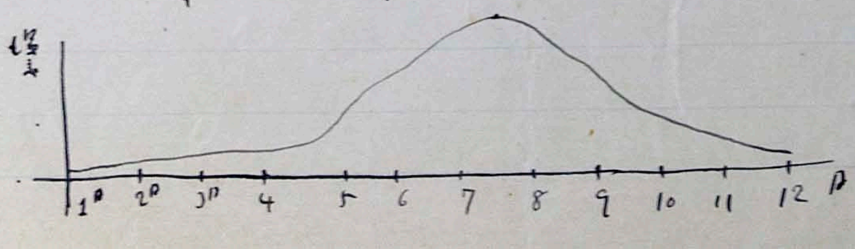
~~18 Hooker'sche Untersuchung~~

4. ~~5.~~ 長期変化ト短期変化

~~6~~. Elimination of short and long time variations. Moving average.

変動ニ長期的ノモノト短期的ノモノアリ。



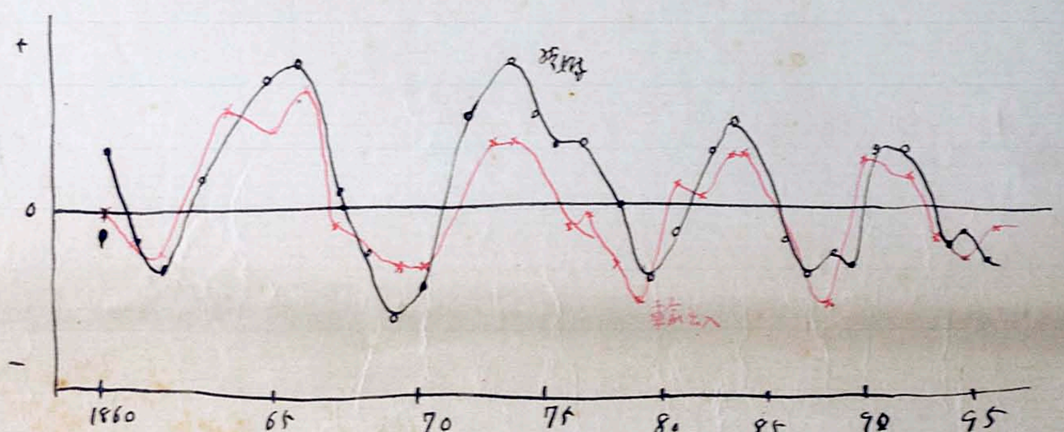


31.5
28.6
28.2
24.9
26.4
27.6
21.6

例2. Hooker 英国.

1000人ニ付テ

	結婚数	九年ノ平均	偏差	一人ニ付テ 輸入+輸出 (ポンド)		
1855	16.2			9.36		
~~1856~~ 6	16.7			11.14		
7	16.5			11.85		
8	16.0			10.73		
9	17.0	16.5	+0.5	11.72	12.15	−0.43
1860	17.1	16.6	−0.5	13.03	12.94	+0.09
1	15.3			13.01		
2	16.1			13.40		
3	16.8			15.13		
4	17.2			16.43		

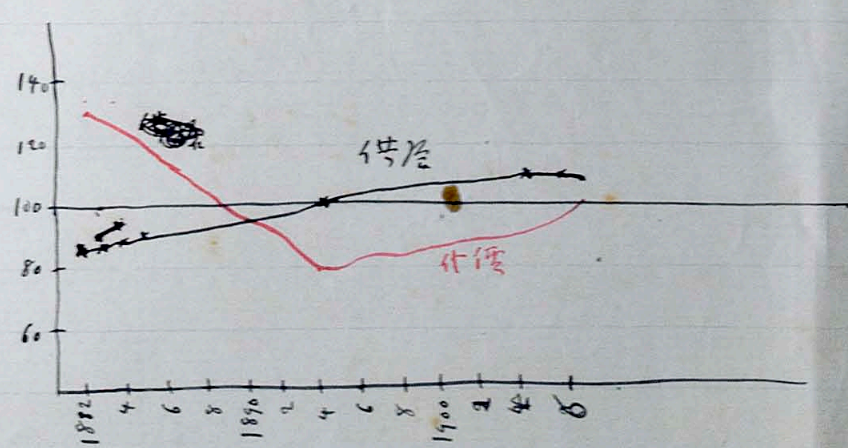


$r = +0.86$

次ニ short time variation ヲ除キ去リテ, correlation ヲ見ル場合 ~~研究~~.

上ニ示セル商品ノ供給ト代価ノ例ニヨル.

	供給 (moving average)	代価 (moving average)
1882	84	133
3	85	129
4	87	124
5	89	117
6	.	.
7	.	.
.		
.		
.		
1906		



コレニテモ inverse correlat アルコトハ明カナレドモ,

コレ供給前ノ方法ニテモ分カル.

30. numerical ~~D~~ Differentiation ~~and integration~~.

$f(x)$ が $x_0,\ \pm x_1,\ \pm x_2, \dots$ に対して与えられるとき、$f'(x_0)$ を求めること。

Stirling の interpolation

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\Delta_{-1}^{(1)} + \Delta_0^{(1)}}{2} u + \Delta_{-1}^{(2)} \frac{u^2}{2!} + \frac{\Delta_{-2}^{(3)} + \Delta_{-1}^{(3)}}{2} \frac{u(u-1)(u+1)}{3!} + \cdots$$

$\left(u = \dfrac{x - x_0}{\Delta x}\right)$ u について微分 ~~し、u=0 とおけば~~ すれば:

$$\cancel{f'(x_0)} =$$

$$f'(x) \cdot \frac{dx}{du} = f'(x) \Delta x = \frac{\Delta_{-1}^{(1)} + \Delta_0^{(1)}}{2} + \Delta_{-1}^{(2)} \frac{u}{1!} + \frac{\Delta_{-2}^{(3)} + \Delta_{-1}^{(3)}}{2} \frac{u(u-1)(u+1)}{3!} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right) + \cdots$$

u=0 とおけば:

$$f'(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[\frac{\Delta_{-1}^{(1)} + \Delta_0^{(1)}}{2} - \frac{\Delta_{-2}^{(3)} + \Delta_{-1}^{(3)}}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{\Delta_{-3}^{(5)} + \Delta_{-2}^{(5)}}{2} \cdot \frac{1}{30} + \cdots \right]$$

difference table は次のようなものである。

Ex.

$$\Delta_{-1} = \Delta_0 - \Delta_{-1}$$
$$= f(x_1) - \tfrac{f}{(2)}(x_0) + f(x_0)$$

31. Numerical integration

Bessel の interpolation を用いる

$$f(x) = f(x_0) + \Delta_0^{(1)} u + \frac{\Delta_0^{(2)} + \Delta_{-1}^{(2)}}{2} \frac{u(u-1)}{2!} + \Delta_{-1}^{(3)} \frac{u(u-1)(u-0.5)}{3!} + \cdots$$

$$\int_0^1 f(x)\,du = f(x_0)\Big[u\Big]_0^1 + \Delta_0^{(1)}\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^1 + \cdots\cdots$$

$$u = \frac{x - x_0}{\Delta x} \qquad du = \frac{dx}{\Delta x}, \qquad \begin{cases} u=0 & x = x_0 \\ u=1 & x = x_0 + \Delta x \end{cases}$$

(I) $$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx = \Delta x \cdot \Big[f(x_0) + \frac{\Delta_0^{(1)}}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta_0^{(2)} + \Delta_{-1}^{(2)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta_{-1}^{(4)} + \Delta_{-2}^{(4)}}{2} - \cdots$$

三項までで止めれば その誤差の 大体の限界は $\frac{11}{720} \Delta x \cdot \frac{\Delta_{-1}^{(4)} + \Delta_{-2}^{(4)}}{2}$. Δx が極めて小さければ $\underline{\frac{11}{720} \Delta x^5 \cdot f^{(4)}(x_0)}$

Stirling を用いれば：

(II) $$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx = 2 \cdot \Delta x \cdot \Big[f(x_0) + \frac{\Delta_{-1}^{(2)}}{6} - \frac{\Delta_{-2}^{(4)}}{180} + \cdots \Big] \quad \frac{\Delta_{-3}^{(6)}}{1512}$$

二項までで止めれば誤差の限界は大体 $2\Delta x \cdot \frac{\Delta_{-2}^{(4)}}{180}$, $\underline{\frac{1}{90} \Delta x^5 \cdot f^{(4)}(x_0)}$

Ex. $\int_1^x \frac{dx}{x} = \log_e x$ (II) を用いよう. $\Delta x = 0.1$, $x_0 = 1.1$, $\int_1^{1.2} \frac{dx}{x}$

6 桁の表 ・ 6 桁だけ正しく

	x	$\frac{1}{x}$	$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$	$\Delta^{(4)}$
-2	0.9	1.111111				
			-111111			
-1	1.0	1.000000		20202		
			-90909		-5051	
0	1.1	0.909091		15151		1556
			-75758		-3495	
	1.2	0.833333		11656		
			-64102			
	1.3	0.769231				
	1.4					
	1.5					

$$\int_1^{1.2} \frac{dx}{x} = 2 \times 0.1 \cdot \Big[0.909091 + \frac{0.015151}{6} - \frac{0.001556}{180} \Big]$$

$$= 0.1823214$$

$(\log_e 1.2 = 0.1823214)$. 正しい

$$\int_{1.2}^{1.4} = 0.1541506$$

$$\int_1^{1.4} = 0.3364720$$

$(\log_e 1.4 = 0.3364721)$

$$\int_1^2 = 0.6931468$$

$(\log_e 2 = 0.6931472)$

三項までで止めれば、誤差の限界は

大体 $2\Delta x \cdot \dfrac{\Delta_{-3}^{(6)}}{1512} \sim \dfrac{1}{750}\,\overline{\Delta x}^{7} \cdot f^{(6)}(x_0).$

$f(x) = x^{-1},$ $\cancel{f'(x) = -x^{-2}} \quad \cancel{f^{(6)}(x) = (-1)(-2)x^{-7}}$

$|f^{(6)}(x)| = 6!\, x^{-7}.$

$\dfrac{1}{750} \cdot \dfrac{\overset{(720)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}{(1.1)^7}.$ $(0.1)^7 < \dfrac{(0.1)^7}{(1.1)^7} < (0.1)^7 = 10^{-7}.$

[illegible]

0.6	0.880
0.7	2.354
0.8	3.703
0.9	4.925
1.0	6.020
1.1	6.986
1.2	7.821

§20. Numerical differentiation

二つの方法がある。(いづれも不十分)

第一は interpolation を用い、第二は empirical formula を用いる。

§21. Numerical integration.

二つの方法が多く広く用いられる。

第一は interpolation を用いる、

第二は 〃 を用いないもの。

これは実用上のみでなく、理論的にも興味がある。

日高孝次(気象台)、平値積分法(岩波)

§22. Mechanical quadrature

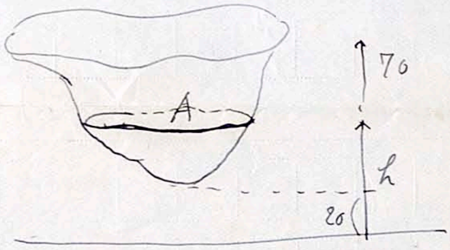
(Mittelwert Methode)

continued fraction (連分数)によっての函数の表示 Perron, Kettenbruch

或る特別の polynomial (orthogonal func.) による函数の表示

Simpson の例。

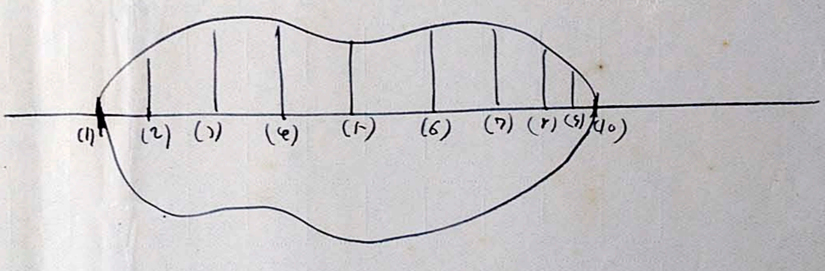
貯水池



h メートル	A 立方メートル
20	0
25	11800
30	23600
35	37100
40	51000
45	61500
50	76010
55	89000
60	102100
65	118250
70	130300

(1) $h=70$ まで充されたときの体積。

(2) $h=44.5$ と 65.5 の間の体積。



第五章

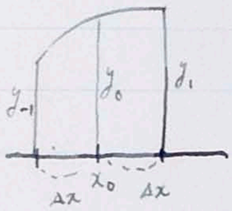
Mechanical quadrature (Numerical integration)

§32. General principle

(II) で 二項まで取ったものは

$$\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f(x)\,dx = 2\cdot\Delta x\left[f(x_0)+\frac{\Delta_{-1}^{(2)}}{6}\right].$$

$$\Delta_{-1}^{(2)} = \Delta^{(2)} f(x_{-1}) = \Delta^{(1)} f(x_0) - \Delta^{(1)} f(x_{-1})$$
$$= f(x_1)-f(x_0)-\left[f(x_0)-f(x_{-1})\right]$$
$$= f(x_1)-2f(x_0)+f(x_{-1}).$$



$$\int_{x_{-1}}^{x_1} y\,dx = \frac{\Delta x}{3}\cdot(y_{-1}+4y_0+y_1).$$

$y=f(x)$

weight

Simpson's rule

$$\int_{x_0}^{x_n} y\,dx = \frac{\delta}{3}\cdot\left(y_0+4y_1+y_2 + y_2+4y_3+y_4 + y_4+\cdots + y_{n-2} + y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

n 偶数、 $$= \frac{\delta}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

~~Mechanical quadrature~~ planimeter.

一般について

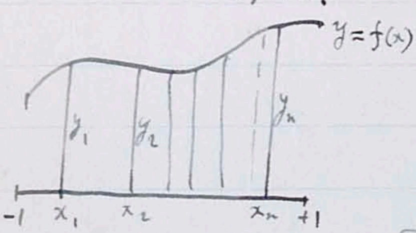
$$I = \int_a^b F(x)\,dx$$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \qquad I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} F\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)dt$$

ない場合は

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \quad (\text{Mittelwertmethode})$$

のみを考へる。 その近似値を次の形に ~~…~~ 表はされる場合を研究しよう。



$$A = R_1y_1 + R_2y_2 + \cdots + R_ny_n.$$

$R_1, R_2, \cdots R_n$ は weight.

Simpson rule はその一つの場合である。

Taylor で

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad (-1 \leq x \leq +1)$$

$$\left(\int_{-1}^{+1} a_1x\,dx = \frac{a_1}{2}\left|x^2\right|_{-1}^{+1} = 0.\right)$$

$$J = a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \cdots$$

$$y_k = a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + a_3x_k^3 + \cdots$$

$$A = a_0\sum_{k=1}^{n} R_k + a_1\cdot\sum x_kR_k + a_2\cdot\sum x_k^2R_k + \cdots$$

JとAとを出来る丈け一致させるためには

$$\begin{cases} \sum R_k = 1 \\ \sum x_kR_k = 0 \\ \sum x_k^2R_k = \frac{1}{3} \\ \sum x_k^3R_k = 0 \\ \cdots\cdots \\ \sum x_k^{2h}R_k = \frac{1}{2h+1} \\ \sum x_k^{2h+1}R_k \cdots \end{cases}$$

p 個の ~~…~~ 係数 ~~…~~ が順次に決定すれば ~~…~~ すて出い

~~x_k … から決定することが~~

$$\left[\begin{aligned} \sum x_k^pR_k &= \frac{1}{p+1} - \Omega \quad (p \text{ even}) \\ &= -\Omega \quad (p \text{ odd}) \end{aligned}\right]$$

Fehler $F = J - A = a_p \Omega + a_{p+1}(\quad) + \cdots$

Fehler の Abschätzung は、近似的に

$$F \doteqdot a_p \Omega = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \cdot \Omega$$

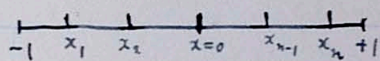
33. Newton-Cotes' ~~method formula~~ method [$x_1, x_2, \ldots$ の位置をよって 方法の type]

equidistant で；$x=0$ について symmetric。その上に

$$\left.\begin{aligned} &R_k = R_{n-k+1} \\ &\cancel{R_2 = R_{n-1}} \quad (k=1,2,\cdots) \end{aligned}\right\}$$ なると仮定する。

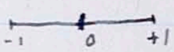
$x_k = -x_{n-k+1}$

偶数番目の条件式は自然に成立する。



Newton-Cotes が選んだ $x_1, x_2, \cdots$, $R_1, R_2, \cdots$ について述べる。

$\underline{n=2}$



(unique な solut' ではない)

$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$

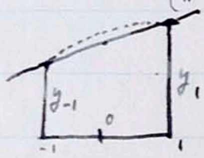
$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 1 \\ x_1 R_1 + x_2 R_2 = 0 \end{cases}$$

$(p=2)$

$\Omega = \frac{1}{3} - \sum x_k^2 R_k$

$= \frac{1}{3} - 1$

二点を通る直線 ($n-1$次)



$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = -1 & x_2 = 1 \\ R_1 = \frac{1}{2} & R_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} &\Omega = -\frac{2}{3} \\ &F = -\frac{2}{3} a_2 + \cdots \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2}(y_{-1} + y_{+1})$$

半分に注意せよ

梯形法

$\underline{n=3}$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 1 \\ x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 = 0 \\ x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + x_3^2 R_3 = \frac{1}{3} \\ x_1^3 R_1 + x_2^3 R_2 + x_3^3 R_3 = 0 \end{cases}$$

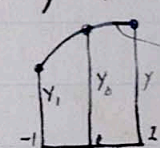
$(p=4)$

x	-1	0	1
R	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$F = -\frac{2}{15} a_4 + \cdots$

Simpson

三点を通る $n-1=2$ 次 parabola



$\underline{n=4}$

x	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
R	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$F = -\frac{8}{135} a_4 + \cdots$

$\underline{n=5}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
R	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

$F = -\frac{1}{42} a_6 + \cdots$

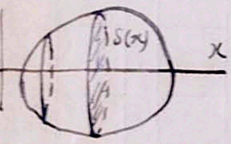
34. Tschebyscheff's ~~formula~~ method (1874) [$R_1, R_2, \cdots$ の値をよって 方法の type]

$x=0$ について symmetric (non-equidistant) $\quad x_k = -x_{n-k+1}$

$R_1 = R_2 = R_3 = \cdots\cdots = R_n = \frac{1}{n}$ [長計の一つ 24頁]

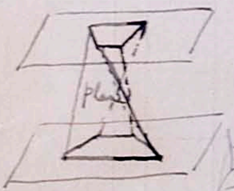
と仮定する。

偶数番目の方程式は自然に成立する。

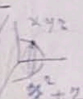


$$V=\int S(x)\,dx$$

二次曲面,  角錐 prism.  

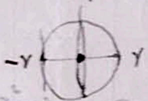


これ等の volume については
simpson 方が完全に成立す.
例へば：球



$y^2+z^2=r^2-x^2$

$S(x)=\pi(y^2+z^2)=\pi(r^2-x^2)$

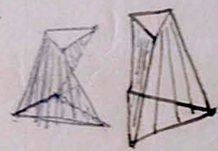


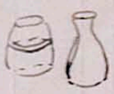
$$\frac{1}{6}\left[S(-r)+4\cdot S(0)+S(+r)\right]$$

$$=\frac{4}{6}\cdot\pi r^2$$ 平均截面

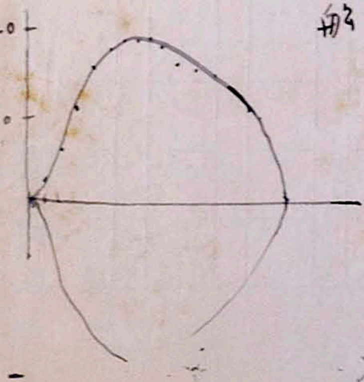
これに長さ 2r

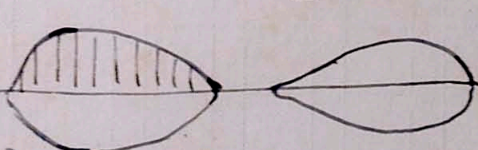
$$V=2r\cdot\frac{4}{6}\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

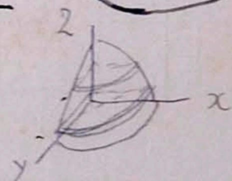


樽, 瓶  提防 simpson.

物体の重心の位置,（積分）の決定にも
simpson 等の方が応用される.
船の面積, 体積, 重心, 







$\frac{1}{4}(2x_1^2+2x_2^2) = \frac{1}{3}$

$R(x_1+\cdots+x_4)=0$
$R(x_1^2+\cdots+x_4^2)=\frac{1}{3}$
$R(x_1^3+\cdots+x_4^3)=0$
$R(x_1^4+\cdots+x_4^4)=\frac{1}{5}$
$R(x_1^5+\cdots+x_4^5)=0$

$p=6$

$R(x_1^6+\cdots+x_4^6)=\frac{1}{7}-\Omega.$

$F = a_6\Omega+\cdots$

$n=4$ の場合.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$x_1 = -x_4, \quad x_2 = -x_3.$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2 = \frac{2}{3} \\ x_1^4+x_2^4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$(x_1^2+x_2^2)^2-(x_1^4+x_2^4) = 2x_1^2x_2^2$

$x_1^2x_2^2 = \frac{1}{45}.$

$t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{45}=0$, roots は x_1^2, x_2^2

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{3}+\frac{2}{15}\sqrt{5} \\ x_2^2 = \frac{1}{3}-\frac{2}{15}\sqrt{5}. \end{cases}$$

$\Omega = \frac{1}{7}-\frac{2}{4}(x_1^6+x_2^6) = \frac{16}{945}$

$$J = \frac{1}{4}\Big[f\Big(-\sqrt{\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{15}\sqrt{5}}\Big)+f\Big(-\sqrt{\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{15}\sqrt{5}}\Big) + f\Big(\sqrt{\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{15}\sqrt{5}}\Big)+f\Big(\sqrt{\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{15}\sqrt{5}}\Big)\Big]$$

$F = \frac{16}{945}a_6+\cdots$

<u>$n=2$</u> $\quad x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$R=\frac{1}{2} \quad F=\frac{4}{45}a_4+\cdots$

<u>$n=3$</u> $\quad x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad 0 \quad \frac{1}{2}\sqrt{2}$

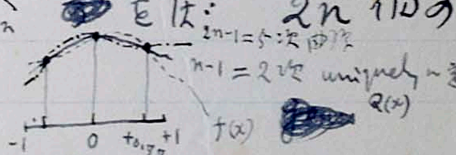
$R=\frac{1}{3} \quad F=\frac{1}{30}a_4+\cdots$

Tschebyscheff's polynomials

Milne-Thomson, Calculus of finite differences (1933).

35. Gauss' ~~formula~~ method (Gauss, 1826, Encke, 1863)

Gauss は x 及び R に初めから條件を付けないで; n が与へられたとき出来るだけ p の値を大ならしめる(即ち精密さを増すことを)狙った。即ち $\overbrace{x_1,\cdots x_n}^{n}$, $\overbrace{R_1,\cdots,R_n}^{n}$ をば: $2n$ 個の條件式から決定した。(之は uniquely に定まる)



$$2n\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} R_k = 1 \\ \sum x_k R_k = 0 \\ \cdots\cdots \\ \sum x_k^{2n-2} R_k = \frac{1}{2n-1} \\ \sum x_k^{2n-1} R_k = 0 \end{cases}$$

従って

$$\Omega_n = \frac{1}{2n+1}-\sum_{k=1}^{n} x_k^{2n} R_k \qquad F_n = a_{2n}\Omega+\cdots$$

例へば: $n=3$ の場合

$$6\begin{cases} R_1+R_2+R_3 = 1 \\ x_1R_1+x_2R_2+x_3R_3 = 0 \\ x_1^2R_1+x_2^2R_2+x_3^2R_3 = \frac{1}{3} \\ x_1^3R_1+x_2^3R_2+x_3^3R_3 = 0 \\ x_1^4R_1+x_2^4R_2+x_3^4R_3 = \frac{1}{5} \\ x_1^5R_1+x_2^5R_2+x_3^5R_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1^6R_1+x_2^6R_2+x_3^6R_3 = \frac{1}{7}-\Omega_3.$

a, b, c, 1 | a, b, c, 1

x_1, x_2, x_3 が 三次方程式

$a+bx+cx^2+x^3=0$

の root なりと假定する。掛けて加へれば:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c = 0 \\ \frac{1}{3}b + \frac{1}{5} = 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{5}c = 0 \\ \frac{1}{5}b + \frac{1}{7}-\Omega_3 = 0 \end{cases}$$

$a=0, \quad b=-\frac{3}{5}, \quad c=0, \quad \Omega_3=\frac{4}{175}$

三次方程式は $x^3-\frac{3}{5}x=0$. $[x_1=-\sqrt{\tfrac{3}{5}}, \; x_2=0, \; x_3=\sqrt{\tfrac{3}{5}}]$. $\quad F_3 = \frac{4}{175}a_6+\cdots$

$P_3(x) = \frac{5}{2}(x^3-\frac{3}{5}x)$ Legendre polyn. / $R_1=\frac{5}{18}$, $R_2=\frac{4}{9}$, $R_3=\frac{5}{18}$

照明 Illuminat.

下半球面光束（[illegible]）

光度

$$F = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

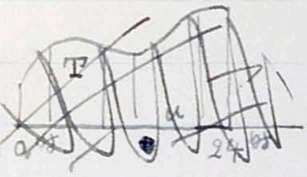
光束

$$t = 1 - \cos\theta$$
$$dt = \sin\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta) \sin\theta \, d\theta = \int_0^1 I^{*}(\theta) \, dt$$

Tschebyscheff の方法を用いて実測する。 山内二郎 (1925).

一日に3回の温度を測定して日々の平均気温をもとめるのに、何時に観測するのが最もよいか？ [T は u の五次の polyn. として精密に表はしうるものと仮定して]



$$\frac{\frac{1}{24}\int_0^{24} T\,du}{\int_{-1}^{+1} T\,dx}$$

$a=0,\ b=24.$ $u = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x = 12+12x$

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

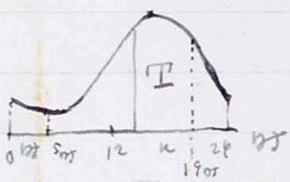
$u_1 = 2.70^{時}$ = 午前2時42分

$u_2 = 12^{時}$ 正午

$u_3 = 21.295$ 午後9時18分

2回ならば、大体 午前5時、午後7時。 [3次と仮定して]

実際3次的の形を表してゐる の曲線



Gauss, interpolat'ion points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を適当に選べば、$2n-1$ 次の polynomial ~~...~~ $P(x)$ と見做しての approximat'n まで高めることが出来る。

$P(x)$ $2n-1$ 次の polyn. とし且つ $P(x)=f(x)$ for $x_1, x_2 \cdots x_n$ とす。 $f(x)$ の代りに $P(x)$ を用ひても大差なしと仮定する。

今 Gauss が選んだ polyn. $Q(x)$ は $n-1$ 次の polyn. で $Q(x)=f(x)$ for $x_1, x_2, \cdots x_n$.

$\phi(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

c を一つの const. とする。

$$\left.\begin{array}{l} P(x)-Q(x) \\ c\,\phi(x) \end{array}\right\}$$ は共に $x=x_1, x_2, \cdots x_n$ に対して零となるから、

$$\overset{2n-1}{P(x)} - \overset{(n-1)}{Q(x)} = c\,\overset{n}{\phi(x)}\cdot\overset{n-1}{N(x)}$$ $N(x)$ は $n-1$ 次の polyn.

とおき得る。

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \overset{2n-1\text{次}}{P(x)}\,dx + F_n \quad (\text{remainder})$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} c\,\phi(x)N(x)\,dx + F_n$$

Gauss の條件によれば $\int_{-1}^{1}\phi(x)N(x)\,dx = 0$ ならざるを得ない。

しかるに

$\int_{-1}^{x}\phi(x)dx = \phi_1(x)$, differentiat.

$\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x}\phi(x)dx^2 = \phi_2(x)$

$\cdots\ \cdots$

$$\int_{-1}^{1}\phi(x)N(x)\,dx = \left[N(x)\int\phi(x)\,dx - \int\left[N'(x)\cdot\int\phi(x)\,dx\right]dx\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\phi_1(x)N(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\phi_1(x)N'(x)\,dx.$$

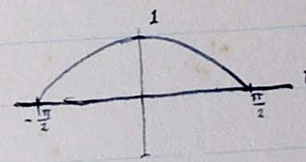
$$\int_{-1}^{1}\phi_1(x)N'(x)\,dx = \left[\phi_2(x)N'(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\phi_2(x)N''(x)\,dx.$$

$\cdots\ \cdots$

$$\int_{-1}^{1}\phi_{n-1}(x)N^{(n-1)}(x)\,dx = \left[\phi_n(x)\cdot N^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}$$ $N^{(n)}(x)=0.$

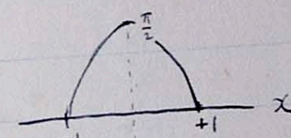
$$\int_{-1}^{1}\phi(x)N(x)\,dx = \left[\phi_1(x)N(x) - \phi_2(x)N'(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\phi_n(x)\cdot N^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}$$

Ex. $J = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1.$ 　F_nの最初の項



	Newton-Cotes	Tschebyscheff	Gauss
$n=2$	0 1.292	0.968 0.035	0.968 0.035
$=3$	1.047 (simpson) −0.053	0.989 0.013	1.00069 −0.00072
$=4$	1.020 −0.024	1.00051 −0.00055	0.9999921 0.0000084
$=5$	0.99929 −0.00076	1.00026 −0.00028	1.000000006 −0.000000006

$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx.$



理論的研究.
実際上の方法と其の根據の説明は,読み終った例でよく分ります;
これより同一の問題即ち Mittelwertmethoden を他の方面から考へて見る.
その一例として……の定理を述べ;

$$D^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$=$$

$$c\,\phi_1(x) = c\int_{-1} \phi(x)\,dx = \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] + A\right]_{-1}$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right],$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]\right]_{x=-1} = 0.$$

(Jacobi)

これは，若し

$$\phi_k(-1) = 0$$
$$\phi_k(+1) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

なつやうに $\phi(x)$ が：

ならば，零となる。

若し

$$c\,\phi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]$$

ならば，よい。

Leibniz

$$\frac{d^m}{dx^m}(uv) = \left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)v + \binom{m}{1}\left(\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}\right)\frac{d}{dx}\cdots + \cdots.$$

$$= \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-1)^n\right]\cdot(x+1)^n + \binom{n-k}{1}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(x-1)^n\right]\frac{d}{dx}(x+1)^n + \cdots$$

何となれば：

$$c\,\phi_k(x) = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[(x^2-1)^n(x+1)^n\right] \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

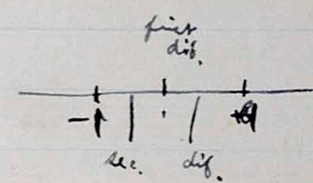
$$\phi_k(-1) = 0, \quad \phi_k(+1) = 0,$$

しかるに一方では

$\phi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ なれば，x^n の係数を比較して，

$$= \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

($=0$ の n 個の root は皆 real で $-1, +1$ の内にある。)



之を Legendre polyn. (1785)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

と云ふ。

しかるに一般に Lagrange の interpolat. formula によれば，$x_1, \cdots x_n$ に於て $f(x)$ と値を等しくする $n-1$ 次の polyn. は

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

であるから

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x-x_k}\cdot\frac{\phi(x)}{\phi'(x_k)}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} Q(x)\,dx + F_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)}{\phi'(x_k)}\frac{dx}{x-x_k} + F_n.$$

$$R_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)}{\phi'(x_k)}\frac{dx}{x-x_k}.$$

$\underline{n=3.}$ $\quad \phi(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \qquad \phi'(x) = 3x^2 - \frac{3}{5}$

$= (x+\sqrt{\tfrac{3}{5}})\,x\,(x-\sqrt{\tfrac{3}{5}})$

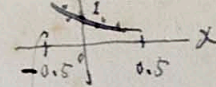
$$R_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{3(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 - \frac{3}{5}}\left(x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,x\right)dx = \frac{5}{12}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\times5}{3\times12} = \frac{5}{18}$$

$$R_2 = \frac{4}{9} \qquad R_3 = \frac{5}{18}$$

それ以上の諸研究は —— Hermite, Stieltjes, Christoffel 等を含む ——

Encyklopädie d. math. Wiss. Bd. II. 3. Teil.

Runge und Willers



第六章 Analytical approximation of empirical functions.

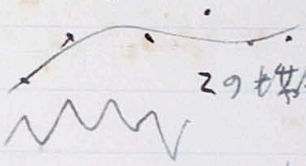
Van der Waal

$pv = RT,\quad (p-a)(v-\quad) =$

36. general principle.

$\left(e^{-x},\ \overset{或るもの}{1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}\right)$

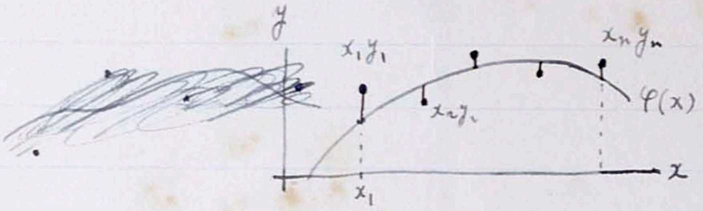
実験公式を求める方法. [実験公式と理論との関係]



この場合 ~~●~~ に interpolation formula を用ひるとその欠点. (凹凸ある場合)

全体として考へたときには, 之等の誤差を正確に通らずとも, 出来るだけ之等の誤差の近くを通るやうな場合な smooth な curve で代用する方が宜しい. free hand. 定規. 計算

$y = \varphi(x;\ a_1, a_2, \cdots, a_k)$



(I) 有限個の場合

error $\varepsilon_1 = y_1 - \varphi(x_1;\ a_1, \cdots a_k)$

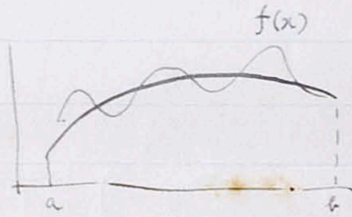
$\varepsilon_2 = y_2 - \varphi(x_2;\ a_1, \cdots a_k)$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| y_k - \varphi(x_k;\ a_1, \cdots a_k) \right| = \min.\qquad \Sigma|\ |^p = \min$$

$$\sum \left[y_k - \varphi(x_k;\ a_1, \cdots a_k) \right]^2 = \min.$$

method of least squares.

mean error $\underline{m}$, $m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n}$



(II). curve の場合

$$\int_a^b \left[f(x) - \varphi(x;\ a_1, \cdots a_k) \right]^2 dx = \min.$$

$$m^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [\quad]^2 dx \quad \text{mean error}$$

(1) ~~如何な~~ functional form $\varphi(x)$ ~~●●~~ を如何に選ぶべきか?

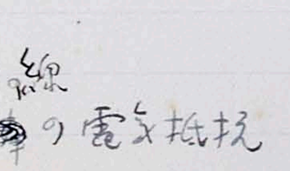
(2) その const. $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を如何に選ぶべきか?

(2) ~~●~~ は 上の方法 (~~●●~~ 最小二乗法) で決定される.

(1) は ?

{ Smoothing 平 ~~●~~ 滑化 に graduation 就いての理論は, 三年の統計法に譲る. (生命保険)

Ex. $y = a + bx$



$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - (a + bx_k) \right]^2 = \min.$$

$$= \Sigma \varepsilon_k^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - (a + bx_k) \right] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - (a + bx_k) \right] x_k = 0.$$

~~Functional form~~

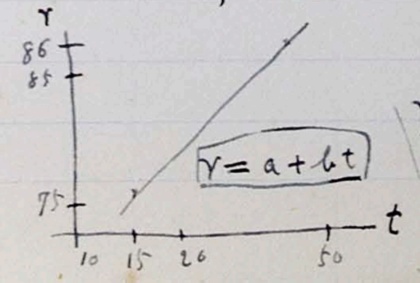
~~$\Sigma x_k y_k - a \cdot \Sigma x_k^2 - b \cdot \Sigma x_k = 0$~~

~~$\Sigma y_k - a \cdot \Sigma x_k - b \cdot n = 0.$~~

$$\begin{cases} n \cdot a + b \cdot \Sigma x_k = \Sigma y_k \\ a \cdot \Sigma x_k + b \cdot \Sigma x_k^2 = \Sigma x_k y_k. \end{cases}$$

銅線の電気抵抗 r micro-ohm, 摂氏 $t°$ 温度

t	r
19.1	76.30
25.0	77.80
30.1	79.75
36.0	80.80
40.0	82.35
45.1	83.90



定規法

$r = 70.63 + 0.291\,t$

$\Sigma \varepsilon_k^2 = 0.2852$

$m = \sqrt{\frac{0.2852}{7}}$

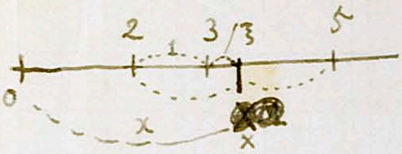
最小二乗法

$$\begin{cases} 7a + 245.3b = 566.00 \\ 245.3a + 9325.83b = 20044.50 \end{cases}$$

$r = 70.76 + 0.288\,t$

$m = \sqrt{0.0382}$

average



$$\varepsilon_1 = x - 2 = 1 + \xi > 0$$

$$\varepsilon_2 = x - 3 = \xi > 0 \quad (\xi > 0)$$

$$\varepsilon_3 = 5 - x = 2 - \xi > 0$$

$$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| = 3 + \xi$$

$$= \text{min.} \qquad \xi = 0.$$

$$\therefore \ \underline{x = 3} \qquad [\text{median}]$$

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = (1+\xi)^2 + \xi^2 + (2-\xi)^2 = -1 - 2\xi + 3\xi^2$$

$$= \text{min.}$$

$$-2 + 6\xi = 0 \qquad \xi = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \ \underline{x = 3\tfrac{1}{3}} \quad \left[= \frac{2+3+5}{3}\right] \quad \text{arithmetic mean}$$

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2 = \text{min.} \qquad (x-a_1) + (x-a_2) + \cdots + (x-a_n) = 0. \qquad x = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

37. Determination of functional forms.

I. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

x を等差級数 (equi distant)

…ある時 $\Delta^n y = \text{constant}$.

II. $y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$

$\frac{1}{x}$ を等差級数にあるとき $\Delta^n y$ const.

III. $\frac{1}{y} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

x arith. series, $\Delta^n \frac{1}{y}$ const.

IV. $y^2 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

x arith. series, $\Delta^n y^2$ const.

~~特殊の技巧を用いて便なることの例~~

x が等差級数をなさない場合、$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

curve 上の一点を (x_0, y_0) とする、$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$

$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2)$

$= (x - x_0)[a_1 + a_2(x + x_0)]$

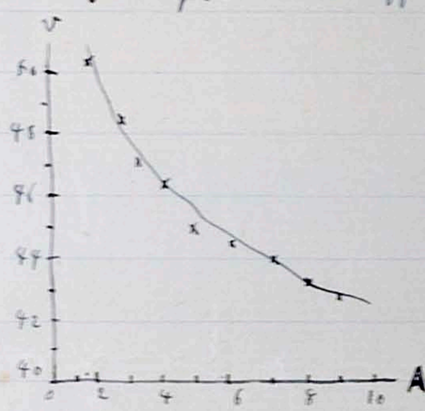
$\frac{y - y_0}{x - x_0} = (a_1 + a_2x_0) + a_2x$

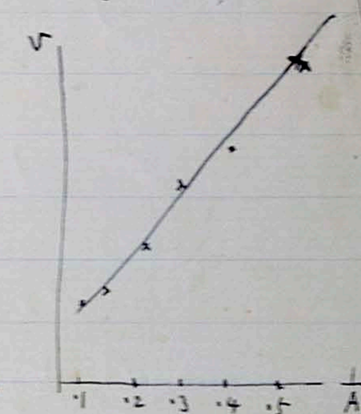
$z = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. 直線.

electric arc (arc の長さ 2 mm). V potential difference (volt)

A electric current (ampere)

A	V	$\frac{1}{A}$	V (cal.)
1.96	50.25	.510	50.52
2.46	48.70	.407	48.79
2.97	47.90	.337	47.62
3.45	47.50	.290	46.84
3.96	46.80	.253	46.22
4.97	45.70	.201	45.36
5.97	45.00	.168	44.80
6.97	44.00	.144	44.40
7.97	43.60	.126	44.10
9.00	43.50	.111	43.85





$V = a + \frac{b}{A}$.

$\left(V = 42 + \frac{16.7}{A}\right)$

least square によって a, b をおめ、V を計算せよ.

V. $y = a \cdot b^x$ $\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log b$ 半對數方眼紙

$\log y = \log a + x \cdot \log b$. [x, log y は直線] または (x arith. series, y. geom. series)

VI. $y = a + b \cdot c^x$

x arith. series $\quad y + \Delta y = a + b \cdot c^{x + \Delta x}$ $\quad \Delta y = b \cdot (c^{\Delta x} - 1) \cdot c^x$ $\quad \Delta x = \text{const.}$

$\therefore \log(\Delta y)$ x は直線.

或は x, arith. series, Δy geom. series.

Ex. 年齢 x に於ける死亡力を μ_x とすれば: $\mu_x = a + b \cdot c^x$

[Makeham's formula] 1860

VII. $\log y = a + b \cdot c^x$

x arith. series. $\Delta \log y$ geom. series.

x 歳で生きてゐる人数 l_x

$\frac{-\frac{dl_x}{dx}}{l_x} = \mu_x$.

VIII. $y = a + bx + c \cdot d^x$

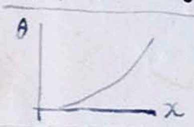
x arith. series, $\Delta^2 y$ geom. series.

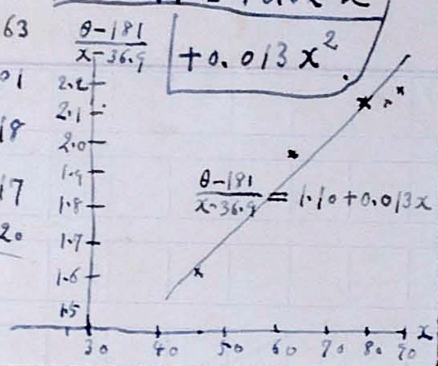
$-\log_e l_x = \text{const} + ax + \frac{b \cdot c^x}{\log_e c}$

亜鉛と鉛の合金に於いて、亜鉛の量をx%、その融解点をθとす

x	θ	$\frac{\theta-181}{x-36.9}$
36.9	181	—
46.7	197	1.63
63.7	235	2.01
77.8	270	2.18
84.0	283	2.17
87.5	292	2.20

$$\boxed{\theta = 141.4 + 0.62x + 0.013x^2.}$$





~~Natural~~ Compound interest law in nature

t (分)	室温の差 θ
0	19.9
3.45	18.9
10.85	16.9
19.30	14.9
28.80	12.9
40.10	10.9
53.75	8.9
70.95	6.9

$$\theta = 19.9e^{-0.0149t}$$

人口の増加

$$N = \cancel{N_0 e^{kt}}$$

$$= N_0(1+r)^n$$

$x = 20$, 30, 40, 60

~~$\log l = 4.96668$~~	$= 92637$
	~~$= 4.89286$~~	$= 85441$
	~~$= 4.76202$~~	$= 78106$

American experience table

$$\log l_x = \log k + x \log s + c^x \log g.$$

$\log k = 5.03372$, $\log s = -0.0032975$, $\log g = -0.00013205$

$\log c = 0.04579609$

$$l_x = k s^x g^{c^x}$$

$l_x =$

IX $\quad y = a^{b+cx+dx^2}$

x arith. series, $\Delta^2 \log y$ const.

X. $\quad y = a \cdot b^x \cdot c^{d^x}$

x arith. series, $\Delta^2 \log y$ geom. series.

[King, Institute of Actuaries' Text Book, Chapt. VI
p. 94 の table を見よ.

XI. $\quad y = \dfrac{x}{a+bx+cx^2}$

x arith. series, $\Delta^2 \dfrac{x}{y}$ const.

Empirical formula 発見の要具としての Nomogram

XII. $\quad y = a x^b$ $\qquad$ 對数方眼紙

$\log y = \log a + b \cdot \log x.$ $\quad$ ($\log x$, $\log y$ 直線)

Ex. 飽和水蒸気の体積 v, 圧力 p
$p = a \cdot v^{-1.0662}$

或は x geom. series, y geom. series.

XIII. $\quad y = a + b \log x + c \log \log x.$

$\log x$ arith. series, $\Delta^2 y$ const.

XIV. $\quad y = a + b x^c$

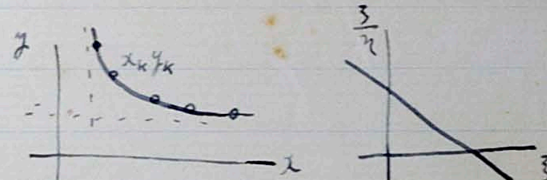
x geom. series, Δy geom. series.

XV. $\quad y = a \cdot b^{x^c}$

x geom. series, $\Delta \log y$ geom. series.

XVI $\quad (x+a)(y+b) = c.$ $\quad \left[y = \alpha + \dfrac{x}{\beta + \gamma x} \right]$

$\left(x - x_k, \ \dfrac{x - x_k}{y - y_k} \right)$ 直線.



$x - x_k = \xi$

$y - y_k = \eta$

$$(\xi + x_k + a)(\eta + y_k + b) = c$$

$$\xi\eta + (y_k + b)\xi + (x_k + a)\eta + (x_k + a)(y_k + b) = c.$$

$(x_k + a)(y_k + b) = c$ であるから

$$\xi\eta + (y_k + b)\xi + (x_k + a)\eta = 0.$$

$$\frac{\xi}{\eta} = -\frac{1}{y_k + b}\xi - \frac{x_k + a}{y_k + b}.$$

Ex. magnetic field の強さ H
鉄の magnetic induction B
$$B = \frac{H}{a + bH}.$$

XVII. $\quad y = a \cdot e^{cx} + b \cdot e^{dx}.$ $\quad$ (radio-activity)

(e は 自然対数の base)

x arith. series.

$$\begin{cases} y_k = a\, e^{c x_k} + b \cdot e^{d x_k} \\ y_{k+1} = a\, e^{c x_k} \cdot e^{c\Delta x} + b \cdot e^{d x_k} \cdot e^{d\Delta x} \\ y_{k+2} = a\, e^{c x_k} \cdot e^{2c\Delta x} + b \cdot e^{d x_k} \cdot e^{2d\Delta x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{k+1} - e^{c\Delta x} y_k = b\, e^{d x_k} (e^{d\Delta x} - e^{c\Delta x}) \\ y_{k+2} - e^{c\Delta x} y_{k+1} = b\, e^{d x_k} (e^{2d\Delta x} - e^{(c+d)\Delta x}) \end{cases}$$

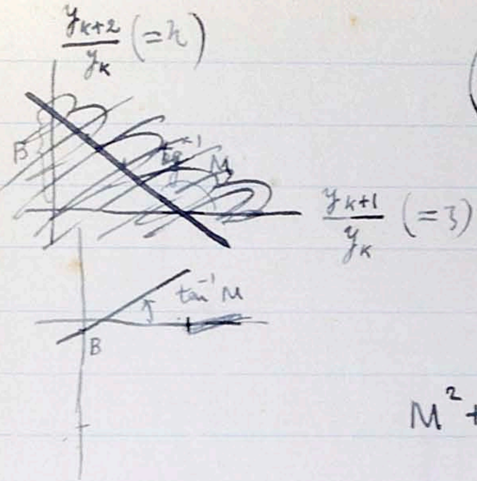
$e^{d\Delta x}$ をかけて これから引けば

$y' = ac\,e^{cx} + bd \cdot e^{dx}$

$y'' = ac^2 e^{cx} + bd^2 e^{dx}$

$$y_{k+2} - (e^{c\Delta x} + e^{d\Delta x}) y_{k+1} + e^{(c+d)\Delta x} \cdot y_k = 0$$

$$\frac{y_{k+2}}{\ } - (e^{c\Delta x} + e^{d\Delta x}) \frac{y_{k+1}}{\ } - e^{(c+d)\Delta x}$$



$\left(\frac{y_{k+1}}{y_k}, \frac{y_{k+2}}{y_k}\right)$ は直線上にある。その直線を

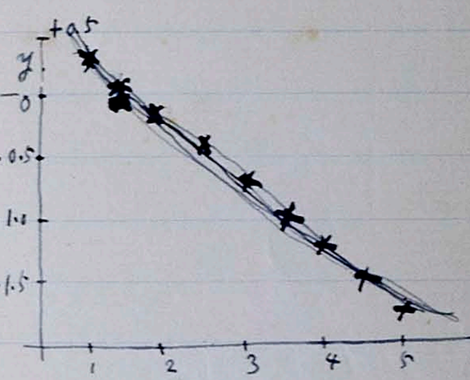
$$\eta = M\cdot\xi + B$$

M slope
B intercept

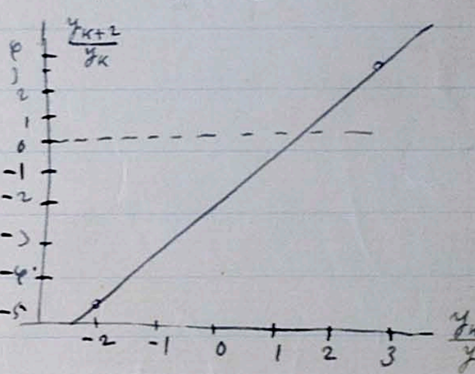
$$M = e^{c\Delta x} + e^{d\Delta x} > 0$$

$$B = -e^{(c+d)\Delta x} < 0$$

$$M^2 + 4B = (e^{c\Delta x} - e^{d\Delta x})^2 > 0.$$



x	y	$\frac{y_{k+1}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}$	$e^{-0.412x}$	$ye^{-0.165x}$
1.0	0.3762			0.662	0.319
1.5	0.0906			0.539	0.071
2.0	−0.1826	0.241	−0.485	0.439	−0.131
2.5	−0.4463	−2.015	−4.926	0.359	−0.295
3.0	−0.7039	2.444	3.855	0.290	−0.429
3.5	−0.9582	1.577	2.147	0.236	−0.538
4.0	−1.2119	1.361	1.722	0.192	−0.626
4.5	−1.4677	1.265	1.532	0.157	−0.698
5.0	−1.7280	1.211	1.426	0.127	−0.757



$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = 1.97\,\frac{y_{k+1}}{y_k} - 0.96$$

$M = 1.97 > 0$

$B = -0.96 < 0$

$M^2 + 4B \overset{= 4(1-0.02)^2 - 4\cdot(1-0.4)}{>} 0.$

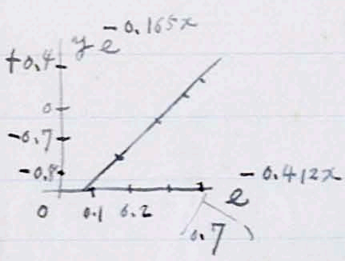
$$e^{c\Delta x} + e^{d\Delta x} = 1.97 = e^{\frac{c}{2}} + e^{\frac{d}{2}}$$

$$0.96 = e^{\frac{c}{2}}\cdot e^{\frac{d}{2}}$$

$c = -0.247$

$d = 0.165$

$$y = a\,e^{-0.247x} + b\,e^{0.165x}$$



$$ye^{-0.165x} = a\cdot e^{-0.412x} + b.$$ 直線.

a, b を定める　$a = 2.00,\quad b = -1.01$

$$y = 2\,e^{-0.247x} - 1.01\,e^{0.165x}$$

Dirichlet series $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ (λ_n monotonous increasing $\to \infty$)

$$y' = b\,e^{ax}(-c\sin bx + d\cos bx)$$
$$y'' = b^2 e^{ax}(-c\cos bx - d\sin bx) = -b^2 y.$$

XVIII. $y = e^{ax}(c\cdot\cos bx + d\cdot\sin bx)$ (damped oscillat.)

x は arithmetic series

$$\begin{cases} y_k = e^{ax_k}(c\cdot\cos bx_k + d\cdot\sin bx_k) \\ y_{k+1} = e^{ax_k}\cdot e^{a\Delta x}\left[c\cdot\cos(bx_k + b\Delta x) + d\cdot\sin(bx_k + b\Delta x)\right] \end{cases}$$

$y_{k+2} =$

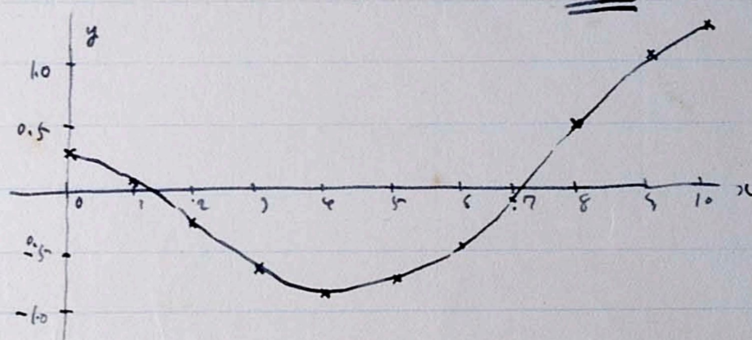
$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = 2\cos(b\Delta x)\cdot e^{a\Delta x}\cdot\frac{y_{k+1}}{y_k} - e^{2a\Delta x}$$

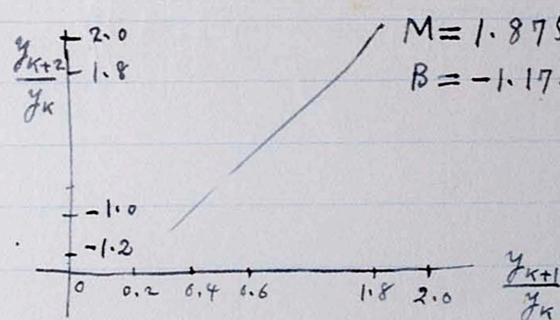
$\frac{y_{k+1}}{y_k}$, $\frac{y_{k+2}}{y_k}$ は直線

$$\eta = M\xi + B.$$
$$M = 2e^{a\Delta x}\cdot\cos(b\Delta x)$$
$$B = -e^{2a\Delta x}$$
$$M^2 + 4B = 4e^{2a\Delta x}\left[\cos^2(b\Delta x) - 1\right] \le 0$$

($b=0$ のとき $=0$)

x	y	$\frac{y_{k+1}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}$
0	0.310		
1	0.011		
2	−0.332	0.04	−1.11
3	−0.636	−30.2	−57.8
4	−0.803	1.92	2.42
5	−0.761	1.26	1.20
6	−0.485	0.95	0.60
7	−0.017	0.64	0.02
8	0.537	0.04	−1.11
9	1.027	−31.6	−60.4
10	1.298	1.91	2.42



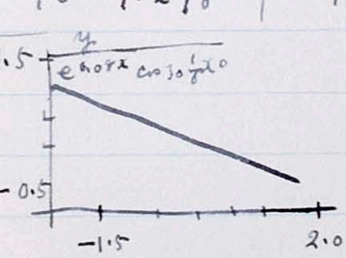


$M = 1.875$
$B = -1.175$

$\Delta x = 1.$

$a = 0.08$
$b = 30^\circ 10'$

$$y = e^{0.08x}\left(c\cdot\cos 30\tfrac{1}{6}x^\circ + d\cdot\sin 30\tfrac{1}{6}x^\circ\right)$$



$$\frac{y}{e^{0.08x}\ \cos 30\frac{1}{6}x^\circ} = c + d\cdot\tan 30\tfrac{1}{6}x^\circ.$$

$$y = e^{0.08x}\left(0.308\cos 30\tfrac{1}{6}x^\circ - 0.496\sin 30\tfrac{1}{6}x^\circ\right).$$

XIX. $y = a x^c + b x^d$

x geometric series $\qquad x_k,\ r x_k,\ r^2 x_k, \dots$

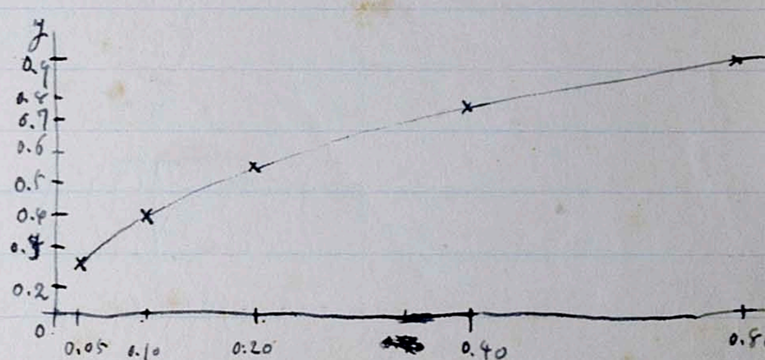
$$\begin{cases} y_k = a x_k^c + b x_k^d \\ y_{k+1} = a x_k^c r^c + b x_k^d r^d \\ y_{k+2} = a x_k^c r^{2c} + b x_k^d r^{2d} \end{cases}$$

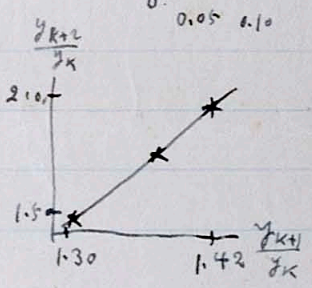
$$\frac{y_{k+2}}{y_k} = (r^c + r^d)\frac{y_{k+1}}{y_k} - r^{c+d}.$$

$$\eta = M\xi + B \qquad M > 0, \quad B < 0, \quad M^2 + 4B > 0.$$

$r = 2$

x	y	$\frac{y_{k+1}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}$	$x^{0.55}$	$x^{0.85}$	y (calc)
0.05	0.283					0.283
0.10	0.402					0.402
0.15	0.488					0.488
0.20	0.556	1.420	1.965			0.556
0.25	0.613					
0.30	..					
0.35						
0.40	0.730	1.383	1.816			
0.45						
0.50						
0.55						
0.60						
0.65						
0.70						
0.75	0.840					
0.80	0.845	1.313	1.520			



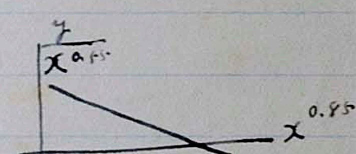


$$\begin{cases} 2^c + 2^d = 4.10 \\ 2^c \cdot 2^d = 3.86 \end{cases}$$

$c = 1.40 \qquad d = 0.55$

$$y = a x^{1.40} + b x^{0.55}$$

$$\frac{y}{x^{0.55}} = a x^{0.85} + b$$



$$y = 1.522 x^{0.55} - 0.685 x^{1.40}$$

38. Approximation by polynomials.

$f(x)$ を $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

で approximate を行う 変分的方法.

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \min.$$

x a を変換して,

$$S = \int_{-1}^{+1} [f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n)]^2 dx = \min.$$

$a_0 \int_{-1}^{1} x^k dx + a_1 \int_{-1}^{1} x^{k+1}$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} x^k [f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n)] dx = 0.$$

$(k = 0, 1, \cdots, n)$

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \qquad J_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x f(x)\,dx, \quad \cdots \quad J_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x^k f(x)\,dx,$$

<u>moment</u>

$\boxed{n = 1}$

$$a_0 = J_0, \qquad a_1 = 3 J_1.$$

$\boxed{n = 2}$

$$a_0 = \frac{3}{4}(3J_0 - 5J_2), \qquad a_1 = 3J_1, \qquad a_2 = \frac{15}{4}(3J_2 - J_0).$$

$\boxed{n = 3}$

$$a_0 = \frac{3}{4}(3J_0 - 5J_2), \qquad a_1 = \frac{15}{4}(5J_1 - 7J_3),$$

$$a_2 = \frac{15}{4}(3J_3 - J_0), \qquad a_3 = \frac{35}{4}(5J_3 - 3J_1),$$

<u>differentiat.</u>

$f'(0)$ をおめる法. $\quad f(x) \sim a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$

$$f'(x) \sim a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

それ $f'(0) \sim \underline{a_1}$

homogeneous

今 $\Omega = \int_{-1}^{+1} [b \cdot f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)]^2 dx$ は, $b, a_0, a_1, \cdots, a_n$ に関する quadratic form である. それ Euler の定理によって

S に於て 1 の代りに b とおけば

$$\frac{1}{2}\left(b \frac{\partial \Omega}{\partial b} + a_0 \frac{\partial \Omega}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \Omega}{\partial a_n}\right) = \Omega.$$

$b = 1$ とおき, 且つ $\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$ から. $\frac{\partial \Omega}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} = 0, \cdots \frac{\partial \Omega}{\partial a_n} = 0,$ から

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial b} = \Omega.$$

しかるに $\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial b} = \int_{-1}^{+1} \{ b [f(x)]^2 - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) f(x) \} dx$

それ $\Omega = \int_{-1}^{1} [f(x)]^2 dx - 2(a_0 J_0 + a_1 J_1 + \cdots + a_n J_n).$

$(a_0 J_0 + \cdots + a_n J_n)$

$$\sum_{k=1}^{r}\left[y_k-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\right]^2=\min.$$

$$\begin{cases} n\cdot a_0+a_1\sum x_k+\cdots+a_n\sum x_k^n=\sum y_k \\ a_0\sum x_k+a_1\sum x_k^2+\cdots+a_n\sum x_k^{n+1}=\sum y_kx_k \\ \cdots\cdots \\ a_0\cdot\sum x_k^n+a_1\sum x_k^{n+1}+\cdots+a_n\sum x_k^{2n}=\sum y_kx_k^n \end{cases}$$

~~Fehlerquadrate~~ ~~mean error~~ $\sum\varepsilon^2$ $m^2=$

$$M=\frac{1}{r}\left(\sum y_k^2-a_0\sum y_k-a_1\sum y_kx_k-\cdots-a_n\sum y_kx_k^n\right).$$

特別の場合、$x_1,x_2,\cdots x_n$ が equidistant なる場合は、その arithmetic mean を M とする。

$$x'_k=x_k-M$$

とおけば：

$$\sum x'_k=0\qquad\sum x'^3_k=0,\qquad\sum x'^5_k=0,\ \cdots$$

一般の場合にも、こうすれば計算が楽になる

$x_1\quad x_2\quad M\quad x_{n-1}\quad x_n$

$x_r y_r$

$+a_n\int_{-1}^{1}x^{k+n}dx=\int_{-1}^{1}x^kf(x)dx.$

$n+1$

$\frac{1}{3}a_2\qquad+\frac{1}{5}a_4\qquad+\cdots=J_0$

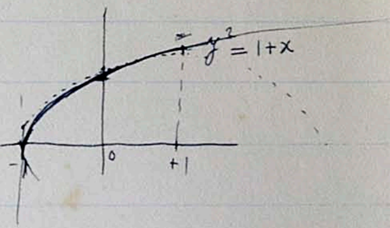
$+\frac{1}{5}a_3\qquad+\frac{1}{7}a_5+\cdots=J_1$

$a_2\qquad+\frac{1}{7}a_4\qquad+\cdots=J_2$

$+\frac{1}{7}a_5\qquad+\frac{1}{9}a_7+\cdots=J_3$

$n+1$

Ex. $f(x)=\sqrt{1+x}$ を $(-1,+1)$ の interval で ~~power~~ polynomial で近似的に表はす。



$$J_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{8},$$

$$J_1=\frac{1}{15}\sqrt{8},\quad J_2=\frac{11}{105}\sqrt{8},\quad J_3=\frac{13}{315}\sqrt{8},\quad J_4=\frac{211}{3465}\sqrt{8}.$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+x)\,dx=1.$$

$n=2.$	$1.010+0.566x-0.202x^2$	$m=0.028$
$n=3$	$1.010+0.471x-0.202x^2+0.157x^3$	$m=0.015$
$n=4$	$0.996+0.471x-0.064x^2+0.157x^3-0.161x^4$	$m=0.0101$
Taylor $\sqrt{1+x}=$	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$	$m=0.0294$

$$=1+0.5x-0.125x^2+0.0625x^3-0.0382x^4.$$

differential quotient $f'(0)=\frac{1}{2}.$

Approx. by the series of polynomials.

Legendre polynomials (最も便利) 一般的に考えて

$$\varphi(x)=a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+\cdots+a_nP_n(x)$$

$P_0=1,\quad P_1=x,$
$P_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x^2,$
$P_3=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3,\ \ldots$

$$S\equiv\int_{-1}^{+1}\left\{f(x)-\left[a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+\cdots+a_nP_n(x)\right]\right\}^2dx=\min.$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=0,\qquad \int_{-1}^{+1}\left[f(x)-\varphi(x)\right]P_k(x)\,dx=0,$$

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)P_k(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}f(x)P_k(x)\,dx.$$

orthogonal

$$\int_{-1}^{+1}P_nP_k\,dx=0\quad n\neq k$$

$$\int_{-1}^{+1}P_k^2\,dx=\frac{2}{2k+1}$$

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)P_k(x)\,dx=a_0\int_{-1}^{+1}P_0P_k\,dx+a_1\int_{-1}^{+1}P_1P_k\,dx+\cdots+a_n\int_{-1}^{+1}P_nP_k\,dx$$

$$=a_k\int_{-1}^{+1}P_k^2\,dx.\qquad a_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)P_k(x)\,dx.$$

mean error

$$m^2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f^2(x)\,dx-\sum_k\frac{1}{2k+1}a_k^2$$

積分は Simpson 等々で計算

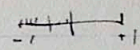


table Jahnke und Emde, Funktionentafeln. 2 Aufl. (1933), p. 185.

x	$P_1(x)$	- - -	$P_7(x)$
0.00	0.0000		0.0000
0.01	0.0100		−0.0219
0.02	..		..

$f(x)=\cos x\qquad -\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}.$

$x=\frac{\pi}{2}t.\qquad \int_{-1}^{+1}\ dt$

$0.63662-0.68709\,P_2^{(t)}+0.05178\ldots$

$m=0.0004$

$$=0.9996-1.2248t^2+0.2265t^4$$

$$=0.9996-0.4964x^2+0.0372x^4$$

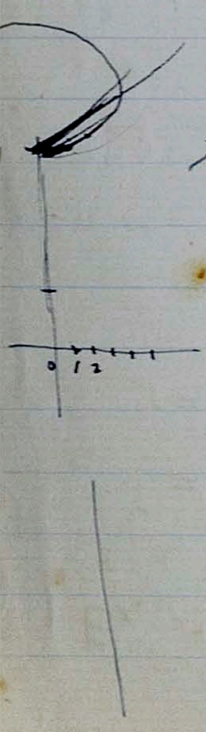
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$$

0.2
0.2
$.04$
$.2$
$.008$
$.2$
$.0016$
$.2$
$.00032$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}.$$

$$\log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C.$$

$$\cancel{1 + x \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C \cdot x}$$



$\cancel{z = \frac{x}{y}}$ $\quad \cancel{\frac{dz}{dx} =}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}}.$$

$$\frac{1}{2} \log(1+z^2) + \operatorname{arctg} z = C - \log$$

$$\log \frac{\sqrt{1+z^2}}{x} + \operatorname{arctg} z = C.$$

$\cancel{xz = y}$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

$$yz = x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot z + y\frac{dz}{dx} = 1.$$

$$\log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} =$$

$$z + x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{z+1}.$$

$$\frac{1-z}{1+z} \cdot z^2 + \frac{dz}{dx} x = z$$

$$\frac{1-z}{1+z} \cdot z^2 - z$$

$$= -x\frac{dz}{dx}$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{z+1} - z = \frac{z-1-(z^2+z)}{z+1} = -\frac{z^2+1}{z+1}.$$

$$\frac{z+1}{z^2+1}\, dz = -\frac{dx}{x}.$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = -\frac{dx}{x}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \cos\frac{\pi}{2}t \qquad -1 \leqq t \leqq +1.$$

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos\frac{\pi}{2}t \cdot P_k(t)\, dt$$

1) table を用る、

2) $$\sum_m \int_{-1}^{+1} \cos\frac{\pi}{2}t \, (\; c \; t^m)\, dt.$$

$$\int_{-1}^{+1} t^m \cos\frac{\pi}{2}t \, dt$$ 積分可能

第七章 Harmonic analysis

simple harmonic unit

Daniel Bernoulli (弦の振動) 人物
Fourier (熱の伝導)

39. Fourier series

これより periodic funct の近似式を論ずる。 $f(x)$ が周期 p を持てば、 $x = \frac{p}{2\pi} t$ とおけば $f(\frac{p}{2\pi} t) = F(t)$ は 2π を period に持つ。故に 2π を period とするもののみ考える。

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx.$$

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \min.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad \left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \end{aligned}\right\} (k=1,2,\cdots,n)$$

$$m^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

$n \to \infty$ にしても必ずしも converge せず。discont. の所に Gibbs phenomena

k が ~~大~~ 大きいとき $\cos kx$, $\sin kx$ は $(0, 2\pi)$ の内で凹凸が急激となるから、k が小なる場合において ($k=1,2,3$, 等) 積分の numerical cal. (graphical cal も) は、[極めて多くの分点を取るにあらざる限り] 困難となる。一般に のみ実行される。 harmonic analyser もまた作り、高価 Henrici

graphical method. [Mises (1922)]

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,d(\sin kx), \qquad b_k = -\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,d(\cos kx).$$

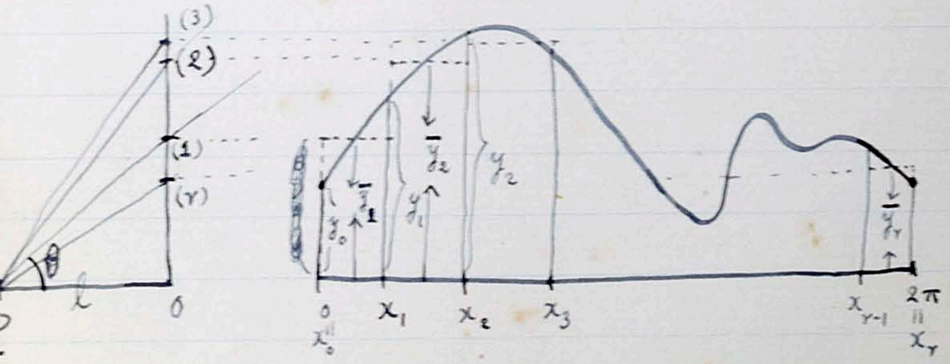
a_0 は平均積分すればよい。

b_k をおめること。(k が小さいとき $1, 2, 3$) 例えば $k=2$ に取る。

$(0, 2\pi)$ を r 等分する。

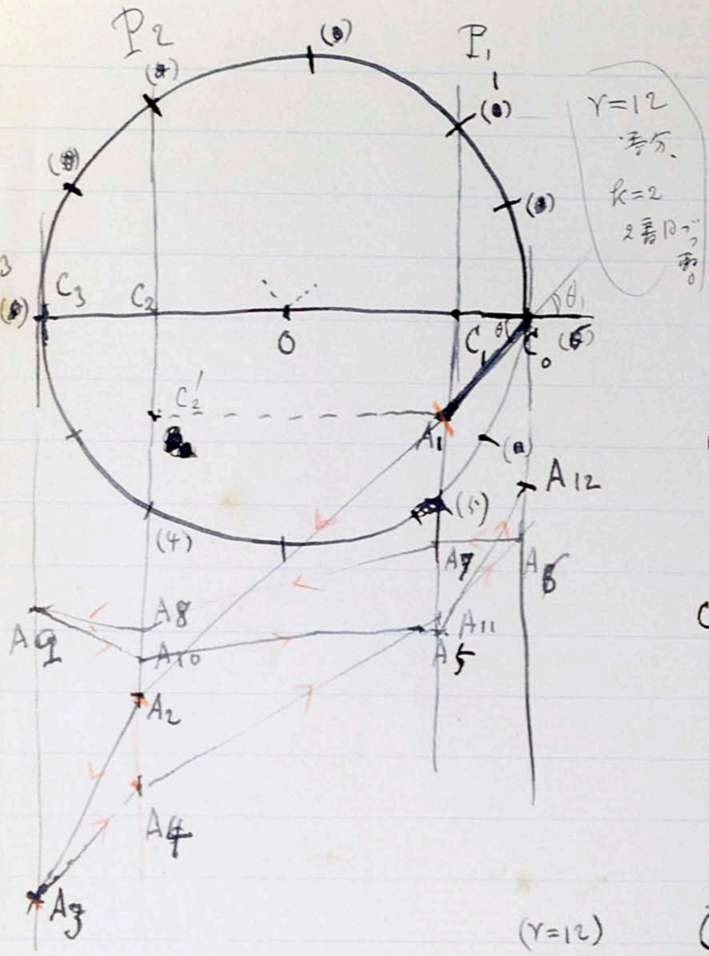
$$x_m = m \cdot \frac{2\pi}{r} \quad (m = 1, 2, \cdots, r)$$

r は k に比して大きく取る。12, 24, 等



$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_r$ は小区域における y の mean value.

$$\tan\theta_m = \frac{\bar{y}_m}{l}.$$



半径 A なる円周を r 等分する。
図では r=12 と取った。（r も多大なる方がよい）。

$\underline{k=2}$

$$b_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, d(\cos kx)$$

$$C_1A_1 = C_0C_1\cdot\tan\theta_1, \qquad C_0C_1 = OC_1 - OC_0 = A\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{r}\right) - A\cdot\cos k\cdot 0$$

$$= \frac{A}{l}\cdot\bar{y}_1\left[\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{r}\right) - \cos(k\cdot 0)\right]$$

$$C_2A_2 = C_1A_1 + C_2'A_2$$

$$= C_1A_1 + C_1C_2\cdot\tan\theta_2 \qquad C_1C_2 = OC_2 - OC_1 = A\cos\left(k\cdot\frac{2\cdot 2\pi}{r}\right) - A\cos\left(k\frac{2\pi}{r}\right)$$

$$= C_1A_1 + \frac{A}{l}\cdot\bar{y}_2\left[\cos\left(k\cdot\frac{2\cdot 2\pi}{r}\right) - \cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{r}\right)\right],$$

……

$$C_rA_r = C_{r-1}A_{r-1} + \frac{A}{l}\cdot\bar{y}_r\left[\cos\left(k\cdot r\frac{2\pi}{r}\right) - \cos\left(k\cdot\overline{r-1}\,\frac{2\pi}{r}\right)\right]$$

ゆえに

$$C_rA_r = \frac{A}{l}\cdot\sum_{m=1}^{r}\bar{y}_m\cdot\left[\cos\left(k\cdot m\frac{2\pi}{r}\right) - \cos\left(k\cdot\overline{m-1}\,\frac{2\pi}{r}\right)\right]$$

$(=C_0A_{12})$

$$= \frac{A}{l}\cdot\sum_{m=1}^{r}\bar{y}_m\cdot\Delta\cos\left(k\cdot m\frac{2\pi}{r}\right), \qquad \left(x_m = m\frac{2\pi}{r}\right)$$

ゆえに

$$\overline{C_rA_r}\times\frac{l}{A} \fallingdotseq -2\pi\cdot b_k.$$

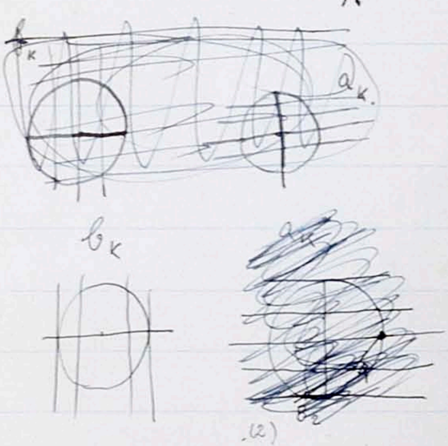
$$\Delta\cos\left(k\cdot m\frac{2\pi}{r}\right) = -\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{r}\right)}{k\cdot\frac{\pi}{r}}\cdot k\frac{2\pi}{r}\cdot\sin\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)k\frac{2\pi}{r}\right]$$

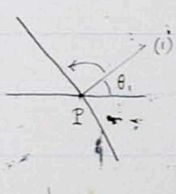
$\cancel{-k\cdot\sin mk\frac{2\pi}{r}}$ $\quad kx_m$

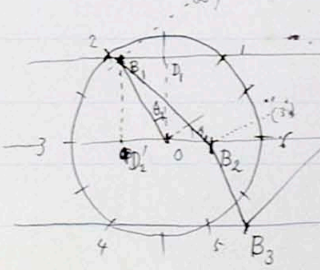
$\Delta\cos kx = -\sin kx\cdot\Delta x$ $\qquad \Delta x = \frac{2\pi}{r}$, Δx

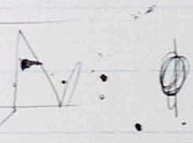
$\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{r}\right)}{k\frac{\pi}{r}} \fallingdotseq 1$ なることが必要。

$r=12$,	$k=1$.	$k\frac{\pi}{r}=0.262$	$\sin k\frac{\pi}{r} = 0.25$
	$k=2$.	$=0.524$	0.50
$r=24$.	$k=1$.	$k\frac{\pi}{r} = 0.131$	$\sin k\frac{\pi}{r} = 0.131$
	$=2$	0.262	0.259
	$=3$	0.392	0.381
	$=4$	0.524	0.500







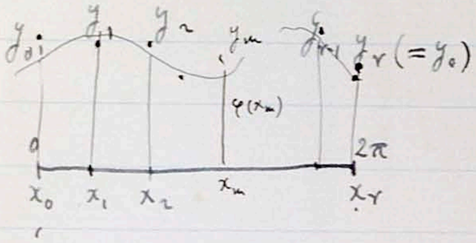


中心 0 から始め、方向図の射影に直角に引く。

$$D_1B_1 = OD_1\cdot\tan\theta_1, \quad OD_1 = A\sin\left(k\frac{2\pi}{r}\right)$$

$$D_1B_1 = \frac{A}{l}\cdot\bar{y}_1\left[\sin\left(k\frac{2\pi}{r}\right) - \sin\left(0\cdot\frac{2\pi}{r}\right)\right]$$

40. Harmonic analysis of empirical functions



$$x_m = m\frac{2\pi}{r}.$$

与へられた値 $r+1$

(未知数 $2n+1$)

$r+1 \geq 2n+1$

$r \geq 2n$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_n\cos nx$$
$$+ b_1\sin x + \cdots + b_n\sin nx$$

$$S = \sum_{m=1}^{r}\left[y_m - \varphi(x_m)\right]^2 = \min. \qquad \frac{\partial S}{\partial a_0}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_k}=0, \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

條件の数 $2n+1$

$$\begin{cases} \sum_m \left[y_m - \varphi(x_m)\right] = 0 \\ \sum_m \left[y_m - \varphi(x_m)\right]\cos kx_m = 0, \\ \sum_m \left[y_m - \varphi(x_m)\right]\sin kx_m = 0, \end{cases}$$

$m = 1, 2, \cdots, r$

$k = 1, 2, \cdots, n.$

未知数 $2n+1$

方程式 $2n+1$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{r}\cdot\sum_{m=1}^{r} y_m \\ a_k = \frac{2}{r}\cdot\sum_{m=1}^{r} y_m\cos kx_m \\ b_k = \frac{2}{r}\cdot\sum_{m=1}^{r} y_m\sin kx_m \end{cases}$$

$$m^2 = \frac{1}{r}\cdot\sum_{m=1}^{r} y_m^2 - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}\left(a_m^2 + b_m^2\right).$$

(a_m のある所まで b_m r の途中から必ず零 0 となる。)

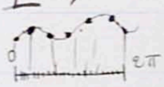
若し $\varphi(x) = a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_{n-1}\cos(n-1)x + a_n\cos nx$
$+ b_1\sin x + \cdots + b_{n-1}\sin(n-1)x$

未知数 $2n$

$r = 2n\,(> n + (n-$

と取り、$r = 2n$ と取れば、 $y_m = \varphi(x_m)$ $(m = 1, 2, \cdots, 2n)$

となる。即ち 上の結果は trigonometric interpolation と一致する。



Faber $n \to \infty$ にしても必ずしも converge しない

graphical method.

$\overline{O_1} = \sin\frac{2\pi}{r}$,
$\overline{O_2} = \sin 2\cdot\frac{2\pi}{r}$
$\overline{O_3} = \sin 3\cdot\frac{2\pi}{r}$
$\cdots \quad \cdots$

$\overline{O_m} = \sin\left(m\frac{2\pi}{r}\right)$

b_k の計算。 方向図を作るに

~~$\overline{O_m} = \sin(k\cdot x_m) = \sin(k\cdot m\frac{2\pi}{r})$~~

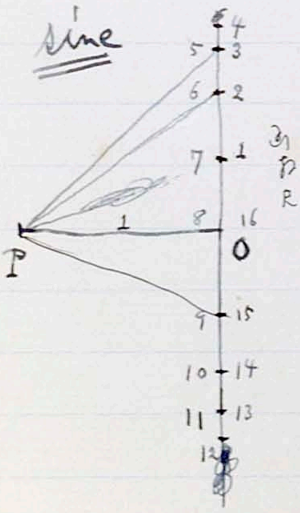
なる数に m なる index をつける。

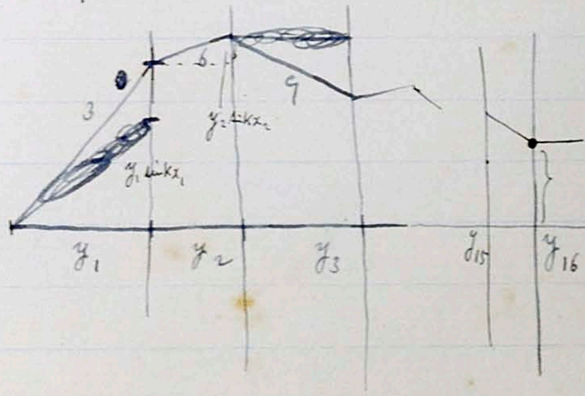
図では $r = 16$

$b_3\ (k=3)$

$= \frac{2}{16}\sum_{m=1} y_m \sin\left(3\cdot m\frac{2\pi}{r}\right)$

sine





$\overline{k}$, $\overline{2k}$, $\overline{3k}$,

$\sin\left(3\frac{2\pi}{16}\right)$ 3, $\sin\left(3\cdot2\cdot\frac{2\pi}{16}\right)$ 6, $\sin\left(3\cdot3\frac{2\pi}{16}\right)$ 9, 12, 15,

18 = 2, 21 = 5, 8, 11, 14

17 = 1, 4, 7, 10, 13

cos (sin) に就ても 同様のものを作る。

但し r が 4 の 倍数ならば 作らんでもよい。

$$\cos\left[\left(\frac{r}{4} - m\right)\frac{2\pi}{r}\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{2} - m\cdot\frac{2\pi}{r}\right) = \sin\left(m\frac{2\pi}{r}\right)$$

$$q + q^2 + \cdots + q^r = q \cdot \frac{q^r - 1}{q - 1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$q = e^{\frac{2\pi i}{r} k}$ とおけば: $q \neq 1$, $q^r = e^{2\pi i k} = 1$

[k は r ~~の倍数でない~~ より小であるから]

$$\sum_{m=1}^{r} e^{i k x_m} = 0 \qquad \sum_{m=1}^{r} \cos k x_m + i \cdot \sum_{m=1}^{r} \sin k x_m = 0$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{r} \cos k x_m = 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{r} \sin k x_m = 0 \end{cases}$$

次に

$$\sum_{m=1}^{r} \cos k x_m \cdot \cos k' x_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{r} \cos (k+k') x_m + \frac{1}{2} \cdot \sum \cos (k-k') x_m,$$

$$\sum \sin k x_m \cdot \sin k' x_m = \frac{1}{2} \cdot \sum \cos (k-k') x_m - \frac{1}{2} \cdot \sum \cos (k+k') x_m,$$

$$\sum \cos k x_m \cdot \sin k' x_m = \frac{1}{2} \cdot \sum \sin (k+k') x_m - \frac{1}{2} \cdot \sum \sin (k-k') x_m.$$

$k, k' = 1, 2, \ldots, n$ 　　　　他は皆 0 となる.

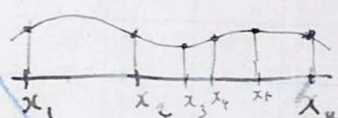
$k + k' \leq 2n \leq r.$

$$\sum_{m=1}^{r} \cos (k-k') x_m = r \qquad [k = k'],$$

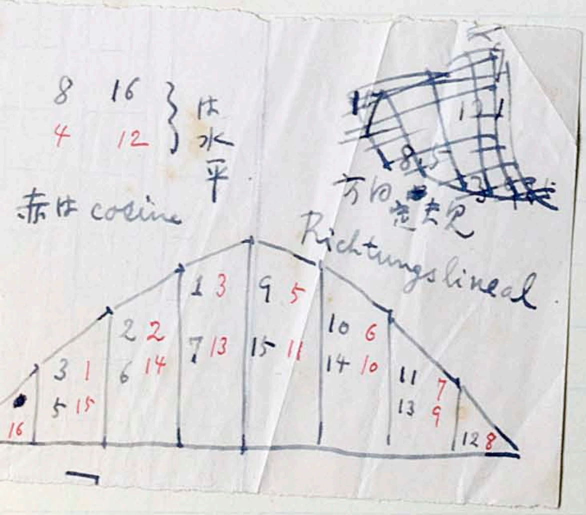
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_m \cos k x_m \cdot \cos k' x_m = 0 \\ \displaystyle\sum \sin k x_m \cdot \sin k' x_m = 0 \\ \displaystyle\sum \cos k x_m \cdot \sin k' x_m = 0 \end{cases} \quad (k \neq k'), \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_m (\cos k x_m)^2 = \frac{r}{2} \\ \displaystyle\sum_m (\sin k x_m)^2 = \frac{r}{2} \end{cases}$$

Gauss の sine-interpolation

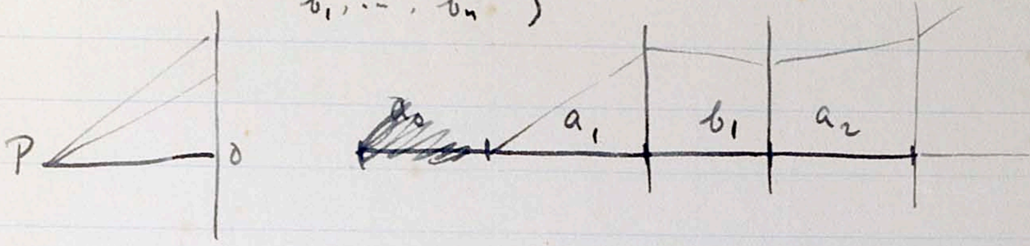
$$f(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin \frac{x - x_1}{2} \cdots \sin \frac{x - x_{m-1}}{2} \cdot \sin \frac{x - x_{m+1}}{2} \cdots \sin \frac{x - x_n}{2}}{\sin \frac{x_m - x_1}{2} \cdots \sin \frac{x_m - x_{m-1}}{2} \sin \frac{x_m - x_{m+1}}{2} \cdots \sin \frac{x_m - x_n}{2}} \cdot f(x_m).$$



等間隔でない場合に用いる.



係数 $\left.\begin{matrix} a_0, a_1, \cdots, a_n \\ b_1, \cdots, b_n \end{matrix}\right\}$ を与へて, $\varphi(x_m)$ を ~~計算~~ 求めること.



Numerical method.

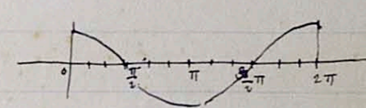
$r = 4p$ の形に取るを便とする。 $r = 12, 24$

Runge, Whittaker.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
sum	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
dif.		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

	sum				difference		
	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
sum	s_0'	s_1'	s_2'	s_3'	s_1''	s_2''	s_3''
dif	d_0'	d_1'	d_2'		d_1''	d_2''	

$r = 12$



$$6 \cdot a_1 = y_1 \cos\frac{\pi}{6} + y_2 \cos\frac{\pi}{3} + y_3 \cos\frac{\pi}{2} + y_4 \cos\frac{2}{3}\pi + y_5 \cos\frac{5}{6}\pi + y_6 \cos\pi + y_7 \cos\frac{7}{6}\pi + y_8 \cos\frac{4}{3}\pi + y_9 \cos\frac{3}{2}\pi + y_{10} \cos\frac{5}{3}\pi + y_{11} \cos\frac{11}{6}\pi + y_{12} \cos 2\pi$$

$$= \cos 0^\circ (y_{12} - y_6) + \cos 30^\circ \cdot [y_1 + y_{11} - (y_5 + y_7)] + \cos 60^\circ [y_2 + y_{10} - (y_4 + y_8)]$$

$$\cancel{= \sin 30^\circ [y_2 + y_{10} - (y_4 + y_8)]}$$

$$= \sin 30^\circ (s_2 - s_4) + \sin 90^\circ (s_0 - s_6) + \sin 60^\circ (s_1 - s_5)$$

$$= \sin 30^\circ \cdot d_2' + \sin 90^\circ \cdot d_0' + \sin 60^\circ \cdot d_1'$$

Cosine

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$			d_2'		$-s_2'$	s_1'		
$\sin 60^\circ = 0.8660$				d_1'				
$\sin 90^\circ = 1$	s_0' s_2'	s_1' s_3'	d_0'		s_0'	$-3 s_3'$	d_0'	d_2'
sum	I	II	I	II	I	II	I	II
sum I + II	$12\ a_0$		$6\ a_1$		$6\ a_2$			
dif I − II	$12\ a_6$		$6\ a_5$		$6\ a_4$		$6\ a_3$	

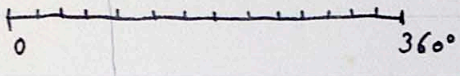
sine

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	s_1''					
$\sin 60^\circ = 0.8660$		s_2''	d_1''	d_2''		
$\sin 90^\circ = 1$	s_3''				s_1''	s_3''
sum	I	II	I	II	I	II
sum I + II	$6\ b_1$		$6\ b_2$			
dif I − II	$6\ b_5$		$6\ b_4$		$6\ b$ [illegible]	

$$= \frac{58}{12} + \frac{149.6}{6}\cos x + \frac{62}{6}\cos 2x + \frac{23}{6}\cos 3x - \frac{24}{6}\cos 4x - \frac{4.6}{6}\cos 5x - \frac{4}{12}\cos 6x$$
$$+ \frac{83.5}{6}\sin x - \frac{50.2}{6}\sin 2x + \frac{5}{6}\sin 3x + \frac{13.8}{6}\sin 4x + \frac{5.5}{6}\sin 5x$$

$y_1 = 38,\ y_2 = 12,\ y_3 = 4,\ y_5 = 14,\ y_6 = 4$

$y_7 = -18\ \ y_8 = -23\ \ y_9 = -27\ \ y_{10} = -24\ \ y_{11} = 32,\ \ y_{12} = 38$



$$\varphi(x) = a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_5\cos 5x + a_6\cos 6x + b_1 \sin x + \cdots + b_5 \sin 5x$$

$a_k\cos kx + b_k \sin kx = c_k \sin(kx + \delta_k)$.

$[a_6 = -\frac{1}{3} = 0.333]$ 捨く.

$$= 4.83 + 28.55\sin(x+60^\circ.83) + 13.30\sin(2x+129^\circ.00) + 3.92\sin(3x+77^\circ.74) + 5.35\sin(4x+295^\circ.45) + 1.20\sin(5x+320^\circ.09)$$

省略して置く

$$m^2 = \frac{1}{12}\sum y_k^2 - a_0^2 - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2).$$
$$= 542.17 - 541.45. \qquad m = 0.85$$

第八章 Approx. Solutions of equations

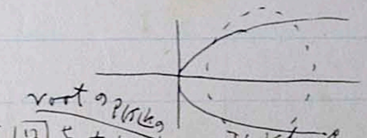
代数方程式の解き方

方程式 $f(x,a,b,c)=0$ の解き方(根)を求む.

41. ~~Some remarks.~~ graphical methods.

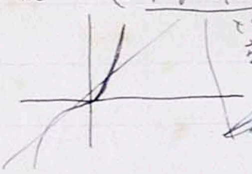
(1) Nomography.

(2) curves の intersection.



~~[illegible]~~ 1回を大きく[illegible]

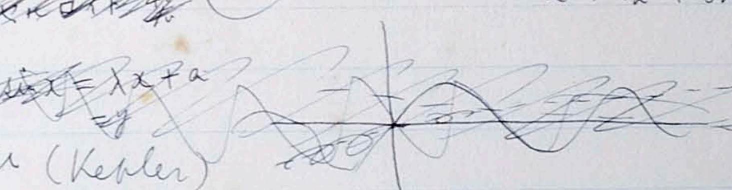
Ex. 1. $y = x^n$ (fixed 標準曲線) と直線 $y + px + q = 0$. その交点 $x^n + px + q = 0$ 根となる. 三次



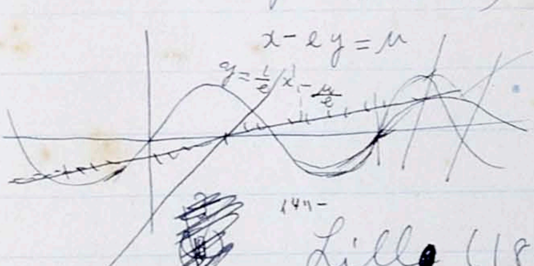
Ex. 2. $\left\{ \begin{array}{l} y^2 = 2x \quad \text{(fixed)} \\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \end{array} \right.$

$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} h = \dfrac{4-at}{4} \\ k = -\dfrac{bt^3}{8} \\ r = \sqrt{h^2 + k^2 - \dfrac{ct^4}{4}} \end{array} \right.$ (t は任意常数)

Ex. 3. ~~$\sin x = \lambda x + a$~~



$x - e \cdot \sin x = \mu$ (Kepler)

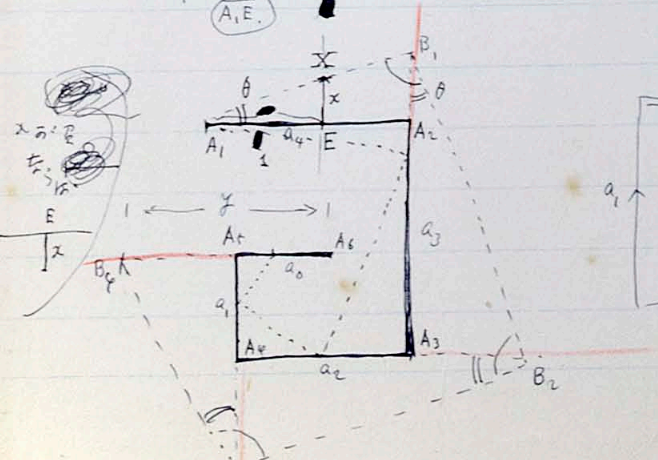


~~(3) 二つ以上の方程式~~ Van den Berg (1888).

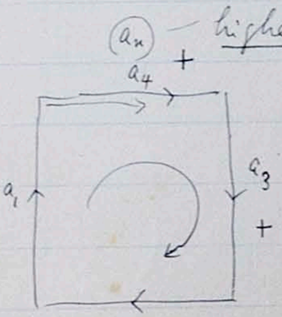
Lill (1867) 代数方程式

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$

単位の長さを適当に定める.

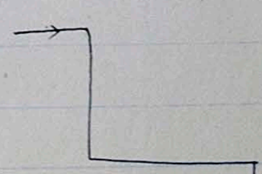


a_n — highest term (これは正に[illegible]).



positive direct.

a_{n-1}



a_3 が 0 ならば

$4x^3 + 6x^2 - 3x - 1.9 = 0$

$\tan\theta = \frac{XE}{A_1E} = \frac{x}{1}$.

$B_1A_2 = A_1A_2 \tan\theta = a_4 \cdot x$. $B_1A_3 = A_2A_3 + B_1A_2 = a_3 + a_4 x$

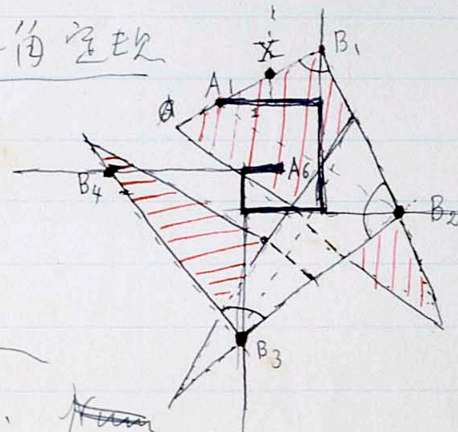
$B_2A_3 = B_1A_3 \cdot \tan\theta = (a_3 + a_4 x)x$. $B_2A_4 = A_3A_4 + B_2A_3 = a_2 + a_3x + a_4x^2$,

$B_3A_4 = B_2A_4 \tan\theta =$ $B_3A_5 =$

$B_4A_5 =$ $B_4A_6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
$= y$.

x の値(の如何)によって、点 B_4 は直線 A_5A_6 の上を移動する。
透明な方眼紙を用い、ピンで A_1 でとめ A_1 の周りに回転させる。
方眼紙上の縦横線を利用して A_1X の方向を変化させ
点 B_4 の位置の変化を見ながら、B_4 を A_6 に来させれば
$a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 = 0$. これから root が知られる。

三角定規

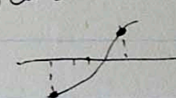


3個

n 次方程式は
$n-1$ 個の三角定規で
解くことが出来る。

42. ~~Num~~ Numerical methods

(1) ~~Newton's~~ Table. interpolation. (inverse interp.)   ipolati



(2) Newton (一般の方程式)

(3) Horner (代数方程式) → 二次は公式から / 三次は trigonometric solut. / Cardan などは死んでも無駄。

代数方程式の real root の数、root のある範囲
Sturm (Liouville)

Successive approximation

$f(x) = 0$ [例へば $x = f(x) + x \equiv \varphi(x)$; $x = \sqrt{f(x)} + x \equiv \varphi(x)$; $x = \int[f(x)] + x \equiv \varphi(x)$]

を $x = \varphi(x)$ の形におく。 $f(x) = 0$ 1 root の附近で常に

$|\varphi'(x)| < 1$ ならば、 $x_2 = \varphi(x_1)$

$$\frac{x - x_2}{x - x_1} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} = \varphi'(x') \cdot$$

$\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right| < 1$ $|x - x_2| \leqq K|x - x_1|$, $(0 < K < 1)$

$x_3 = \varphi(x_2), \ldots$ $|x - x_3| \leqq K|x - x_2| \leqq K^2|x - x_1|$

若し $|\varphi'(x)| > 1$ ならば、 $\varphi(x)$ の inver
$F(x)$ とする。 $\boxed{y = \varphi(x), \quad F(y) = x.}$

$x = \varphi(x)$ ならば $F(x) = x$. しかるに F'

$y = x$ とおけ   root の附近で $|\varphi'(x)| > 1$ ならば $|F'(x)| < 1$.

$x = M + e \cdot \sin x \; [= \varphi(x)] \quad 0<e<1$

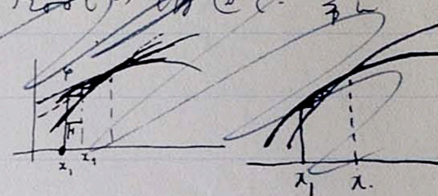
Ex 1.

$|-e \cos x| < 1.$

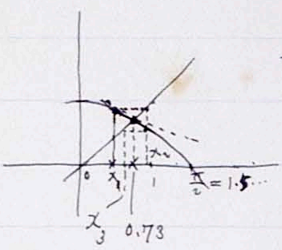
この方法は complex variable の funct' についても成立する。

これを一般的に述べる。

$f(x) = 0$ を $F(x) = \varphi(x)$ と書くとき root の附近で、若し $|F'(x)| < |\varphi'(x)|$ ならば、successive approximat' によって解くことが出来る。



Ex. 2. $x = \cos x.$



$\underline{x_1 = 0.733}$ 小

$\varphi(x) = \cos x \qquad |\varphi'(x)| = |\sin x| < 1.$

$x_2 = \cos 0.733 = 0.7431$ 大

$x_3 = \cos 0.7431 = 0.7363$ 小

$\cdots \qquad \cdots$

$x_{11} = 0.7390$ 小 $\qquad x_{12} = 0.7391$ 大

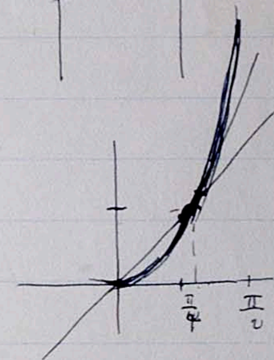
x radian	x°	cos x

$$\left(x_{n+1} = \cos \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right)$$

の方が早い

Ex. 3. $x = \tan x.$

$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x > 1.$



inverse funct' は

$\underline{\tan^{-1} x = x.} \qquad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} < 1.$

若し解が見出されるとは限らない。

$y = ax^3 - x + b$

~~一般に代数方程式の root が~~

~~Ex. 3.~~ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$ → $|x|$ が根が 0 に近い

$$x = -\frac{d + bx^2 + ax^3}{c} \quad [= \varphi(x)]$$

$\varphi'(x) = -\frac{2b}{c}x - \frac{3a}{c}x^2$ 係数が小なれば

$|\varphi'(x)| < 1.$ successive approx.

$$x_{n+1} = -\frac{d + bx_n^2 + ax_n^3}{c}$$

Newton's method (Raphson 1690. Newton は少し前に、これと似た方法を suggest した)

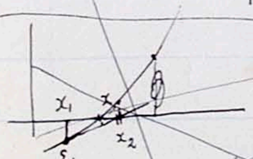
$f(x) = 0 \qquad x_1$ を first approx.

$\underline{x = x_1 + h}$

$$f(x) = f(x_1) + h \cdot f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \cdots$$

$\underline{\varepsilon_1 = f(x_1)} \qquad = \varepsilon_1 + h \cdot f'(x_1) + \cdots$

$\varepsilon_1 + h f'(x_1) = 0. \qquad h = -\frac{\varepsilon_1}{f'(x_1)} \qquad \underline{x_2 = x_1 - \frac{\varepsilon_1}{f'(x_1)}}$ second approx.



$y - \varepsilon_1 = f'(x_1)(x - x_1).$

$y = 0, \qquad x = x_1 - \frac{\varepsilon_1}{f'(x_1)}$

もっと早く approximat' の精密さを高める法。

くわしくは:

$$f(x_1) + \frac{h}{1!} f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) = 0.$$

とおく

43. Newton-Raphson method.

Raphson 1690.
Newtonは少し前に、これと似た方法を示していた。(1685)

$f(x)=0$ の~~solution~~一つの root の x_1 を first approx. とする.

$x = x_1 + h$,

$$f(x) = f(x_1) + h f'(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1) + \cdots \quad = 0$$

h^2 以上を捨てて、 $f(x_1) + h \cdot f'(x_1) = 0$ $\qquad h = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

$f(x)$ が polyn. のとき
会田安明「重乗乗累類術」(1798)
珠算

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$ を second approximat' とする.

x_2 は果して x_1 よりも精密であるか? について sufficient condit' の一つを挙げる。

$f(x)=0$ を $x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $[\, f'(x) \neq 0 \,]$ とかく

$$\equiv \varphi(x)$$

$x_2 = \varphi(x_1)$

根を含む、ある domain に於いて $|\varphi'(x)| < 1$ ならば、確かに x_2 は x_1 よりも精密であり、且つ $x_n \to$ root x,

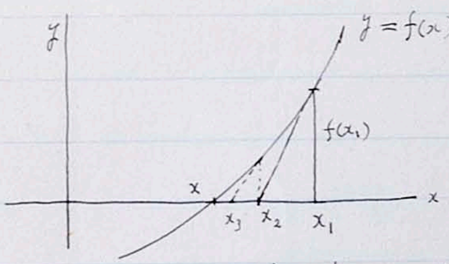
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$\left| \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1. \qquad \text{sufficient cond.}$$

さらに精密な条件については G. Faber, Crelle J. Bd. 138 (1910) を見よ。 そこには (1) $x_n \to x$? (2). $f(x)=0$?

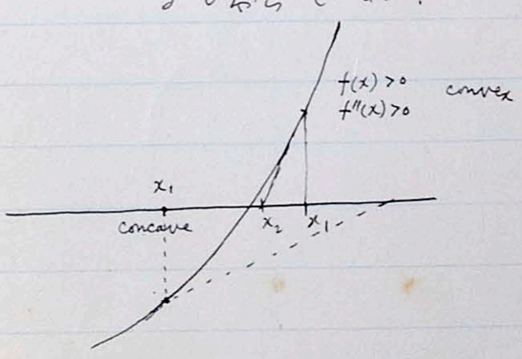
今特に real の場合を考える.

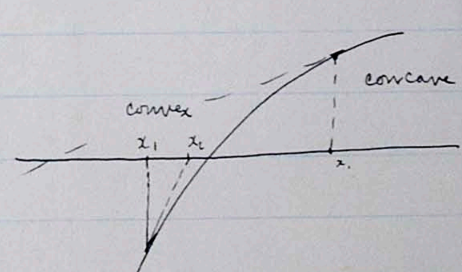


tangent $\quad y - f(x_1) = f'(x_1)\cdot(x - x_1)$

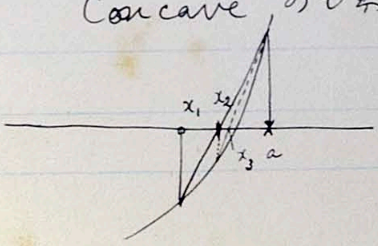
$y=0 \qquad x = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (= x_2)$

これが実際に有利なのは、curve $f(x)$ が x 軸 (x_1 の附近で) に対して convex なる場合である. 即ち $f(x)\cdot f''(x) > 0$.





Concave の場合には、寧ろ linear (~~inverse~~) interpolat' による方が早い.



日本では 中根彦循「開方盈朒術」(1729
方程式解法 linear interpolat' 吉宗
暦術

Newton-Raphson の方法の modification.

もっと早く精密さを高める方法は、色々ある。その中の一つを述べよう。

Newtonでは h^2 以上を棄てたが、例えば h^3 まで取って

$$f(x_1)+\frac{h}{1!}f'(x_1)+\frac{h^2}{2!}\cdot f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)=0.$$ としたとき

これから h をおめるに、次の approx. を用いる。（三次方程式）

$|h|$ は 0 に近いから

~~とおけば~~

$$h=-\frac{f(x_1)+\frac{h^2}{2!}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)}{f'(x_1)}\qquad [\equiv\varphi(h)]$$

とおけば

$$\varphi'(h)=-h\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}$$

$|\varphi'(h)|<1.$ （それ程にも $|h|$ が小ならば）

$$h_1=-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\qquad h_2=-\frac{f(x_1)+\frac{h_1^2}{2!}f''(x_1)+\frac{h_1^3}{3!}f'''(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f''(x_1)}{2[f'(x_1)]^3}\cdot[f(x_1)]^2+\frac{f'''(x_1)}{6\cdot[f'(x_1)]^4}\cdot[f(x_1)]^3.$$

44. Algebraic equation. Ruffini-Horner Method

Ruffini 1804, Horner 1819

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0.$$

一つの root の近似値として x_1 をおめたとき、second approximation をおめるために、$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$. ［$n=4$ の場合］

$x=x_1+h$ とおく。

$$f(x)=f(x_1+h)=f(x_1)+\frac{f'(x_1)}{1!}\cdot h+\frac{f''(x_1)}{2!}\cdot h^2+\frac{f'''(x_1)}{3!}h^3+\frac{f''''(x_1)}{4!}h^4.$$
$$=A_0+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+A_4h^4$$

x^4

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	$(x_1$
	a_4x_1	$a_3'x_1$	$a_2'x_1$	$a_1'x_1$	
	a_3'	a_2'	a_1'	$\boxed{a_0'}$	
	a_4x_1	$a_3''x_1$	$a_2''x_1$		
	a_3''	a_2''	$\boxed{a_1''}$		
	a_4x_1	$a_3'''x_1$			
	a_3'''	$\boxed{a_2'''}$			
	a_4x_1				
	$\boxed{a_3''''}$				
a_4					

$a_0'=((((a_4x_1+a_3)x_1+a_2)x_1+a_1)x_1)+a_0=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+a_4x_1^4=A_0$

$a_1''=\cancel{(a_4x_1+(a_4x_1+a_3))x_1+a}$ $a_1+2a_2x_1+3a_3x_1^2+4a_4x_1^3=A_1$

$a_2'''=a_2+3a_3x_1+6a_4x_1^2=A_2$

$a_3''''=a_3+4a_4x_1=A_3$

$a_4=A_4$

a_0	a_1	a_2	a_3	
a_1	$2a_2$	$3a_3$	$4a$	
a_2	$3a_3$	$6a_4$		
a_3	$4a_4$			
a_4				

Pascal triangle

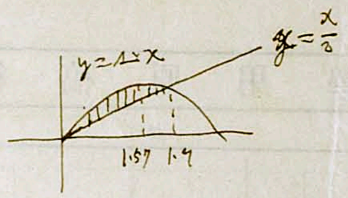
［Pascal (1623-1662)］

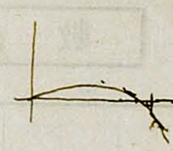
Apianus (1527)

1	1	1	1	1
1	2	3	4	
1	3	6		
1	4			

楊輝 (1261) の中に
賈憲 の~~書~~書にあるとして書いてある。
（1000 比？）

x. $f(x) = \sin x - \frac{x}{2} = 0.$





$x_1 = 1.9$

$f(1.9) = -0.0037000$ $f''(1.9) = -0.94630$

$f'(1.9) = -0.82329$ $h_1 = -0.0044942$

Newton を用いる.

$$x_2 = 1.9 - \frac{-0.0037000}{-0.82329} = 1.9 - 0.0044942$$

$= 1.8955058.$ $f(x_2)$ をもとめん

$\sin x$ の table が困る。

故に modificat. を用いる。

h_1^2 まで

$$x_2 = 1.9 - 0.0044942 - \frac{0.94630}{2(0.82329)^3} \cdot (0.0037000)^2$$

$= 1.9 - 0.0044942$
$\quad - 0.0000116$
$\quad - 0.0000000$ × h_1^3

$= 1.8954942$

この辺までは大丈夫

h の approximation として

$A_0 + A_1 h + \cdots + A_n h^n = 0$.　$|h|$ は小なる故，$A_0 + A_1 h_1 = 0$,　$h_1 = -\frac{A_0}{A_1}$

を得る。是の $x = x_1 + h$ の代りに $x_2 = x_1 + h_1$ を取り，

$x_2 = x_1 - \frac{A_0}{A_1}$ をもって second approx. とする。

次に ~~$x = x_2 + k$~~ 近似度を高めるためには，h の方程式 $A_0 + A_1 h + \cdots + A_n h^n = 0$ を解く，その approx. は h_1 なることを知られてあるから，$h = h_1 + k$ とおけば，

$B_0 + B_1 k + \cdots + B_n k^n = 0$　k の approximation として $k_1 = -\frac{B_0}{B_1}$ を取れば，

third approx. $x_3 = x_1 + h_1 + k_1$，即ち $x_3 = x_1 - \frac{A_0}{A_1} - \frac{B_0}{B_1} - \cdots$

以下之を反覆す。　~~$x = x_1 + h + k + \cdots$~~

注意I　しかるに $A_0 = f(x_1)$,　$A_1 = f'(x_1)$ であるから　$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

これ即ち Newton-Raphson method に外ならない。Horner は algebraic eq. について Newton method を行う一つの簡便で系統的な一つの技術的方法に外ならぬ。

注意II.　早く精密を求めるには　$x_2 = x_1 - \frac{A_0 + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots + A_n h^n}{A_1}$　とも置くがよい。

approximation が相当に近いから

Ex. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5 = 0$　　$f(1) = +2$,　$f(2) = -3$　　$1 < x < 2$.

小数2桁正しく求めよ。

$x_1 = 1$.　　$x = 1 + h$.

1　-4　0　5　(1
　1　-3　-3
-3　-3　| 2
　1　-2
-2　| -5
　1
| -1

$h^3 - h^2 - 5h + 2 = 0$.　　$h_1 = \frac{2}{5} = 0.4$

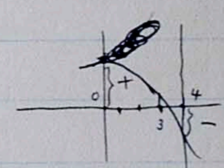
1　-1　-5　2　(0.4
　.4　-.24
-.6

第2小数が入って計算が複雑となる故，根を10倍す。

$h' = 10h$,　　$h = \frac{h'}{10}$.

$h'^3 - 10h'^2 - 500h' + 2000 = 0$.

(10倍に1をつける)



1　-10　-500　2000　(4
　4　-24　-2096
-6　-524　| -96
　4　-8
-2　| -532
　4
| 2

$h'^3 + 2h'^2 - 532h' - 96 = 0$　　符号が変る。

$h'_1 = -\frac{96}{532} \fallingdotseq -0.2$　　$1 + 0.4 - 0.2 = 1.38$

$k_1 = \frac{h'_1}{10}$

実際の計算では一桁づつ計算して行く方が誤りが少いか

(* $3 < h' < 4$)

1　-10　-500　2000　(3
　3　-21　-1563
-7　-521　| 437 *
　3　-12
-4　| -533
　3
| -1

$h'^3 - h'^2 - 533h' + 437 = 0$

$h'_1 = \frac{437}{533} \fallingdotseq 0.8$

1	−10	−53300	437000	(8
	8	−16	−426528	
	−2	−53316	10472	
	8	48		
	6	−53268		
	8			
	14			

$l^3 + 14 l^2 - 53268 l + 10472 = 0$ (3)

$x = x_1 + h_1 + k_1 + l_1$,

$x = 1.38\,196\,6$

0.2 と之手続っ

0.008

+0.56

−10472.xxx

+10472

$l_1 \fallingdotseq \dfrac{10472}{53268} \fallingdotseq 0.196\,6$

四桁目まで正しく

$\fallingdotseq \frac{2}{0.1}$

おめみはに $\boxed{0.5}$ ヲ越エナイ

四桁目で 1 の誤差は $53268 \times 10^{-4} = 5.3268$ となるから

支那 一桁づつ求メテ行ク方法ハ支那が最モ古う、秦九韶「数書九章」(1247) にもある。 元とも保満 もっと古い。

宝は平方根、立方根 $x^2 - A = 0$ 等 Horner 法に於計算スルノデアル。

劉益 (1080) 支那では

[李儼, p.8]

二次方程

Complex root の計算、 real coefficients

$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

$p(x) \equiv [x - (u+iv)] \cdot [x - (u-iv)] = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2)$.

$\cancel{\dfrac{f(x)}{p(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{p(x)}}$ $\qquad f(x) = p(x)\cdot q(x) + r(x)$ $\qquad r(x)$ は一次式

$p(u+iv) = 0$ なるとき $\quad f(u+iv) = r(u+iv)$.

ゆえ $\zeta = u + iv$ とおくとき、 $r(\zeta) = 0$ ならば $f(\zeta) = 0$. 即ち ζ は $f(x) = 0$ の complex root となる。

Ex. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x - 26$

$x = 2.2 + 2.8i$ なるとき $f(x)$ の値をもとめよ、又 $f(x) = 0$ の complex root をもとむ。

$p(x) = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2) = x^2 - 4.4x + 12.68$.

$f(x) = p(x)\cdot q(x) + r(x)$. $\qquad q(x) = x^2 - 0.6x - 0.32$

$\qquad r(x) = 1.19x - 21.95$

$\zeta = 2.2 + 2.8i$,

$f(\zeta) = r(\zeta) = 1.19\zeta - 21.95 = -19.33 + 3.33i$. (小数二位に誤差がある)

今 $f(x) = 0$ の一つの虚根をもとめるため、 $\zeta = 2.2 + 2.8i$ を first approx. として使用する。 Newton method によって 其の補正値は

$$h = -\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 30x - 5$.

$f'(\zeta)$ を計算するために、 $f'(x)$ を $p(x)$ で割れば：

$f'(x) = p(x)\cdot q_1(x) + r_1(x)$. $\qquad f'(\zeta) = r_1(\zeta) = -9.23 - 37.9$

$= -58.1 - 25.8i$

Complex rootsが大体どの辺にあるかを見るには、理論的には代数(又は函数論)などの書にあり。証明は

一般 Complex coef. を持つ alg. eq. の root.

[第一法、次に述べる、 $x = u+iv$

$f(x)=0 \to \varphi(u,v) + i\psi(u,v) = 0.$

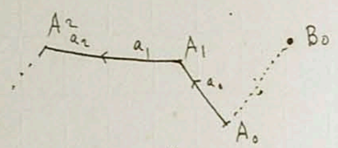
$\cancel{\varphi(u,v)}$ $\left.\begin{array}{l}\varphi(u,v)=0\\ \psi(u,v)=0\end{array}\right\}$ なる curve の交点を求める。]

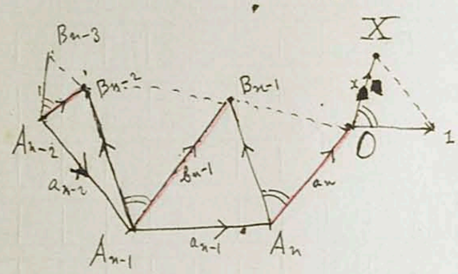
第二法、直接法。

Lill の方法を modify して之に Horner method を結び付ける。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

$a_0, a_1, \ldots a_n$ を vector で表はす。多角形折線。





$$\overrightarrow{A_n B_{n-1}} = a_n x$$

$$\overrightarrow{A_{n-1} B_{n-1}} (= b_{n-1}) = a_n x + a_{n-1}$$

$$\overrightarrow{A_{n-1} B_{n-2}} = b_{n-1}x = a_n x^2 + a_{n-1}x$$

$$\overrightarrow{A_{n-2} B_{n-2}} (= b_{n-2}) = a_n x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\overrightarrow{A_0 B_0} \ (= d_0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = f(x).$$

X の位置を変化すれば B_0 がどう云ふ変化するかを見る。

A_0 と B_0 が重なれば X が root である。(Runge 1917)

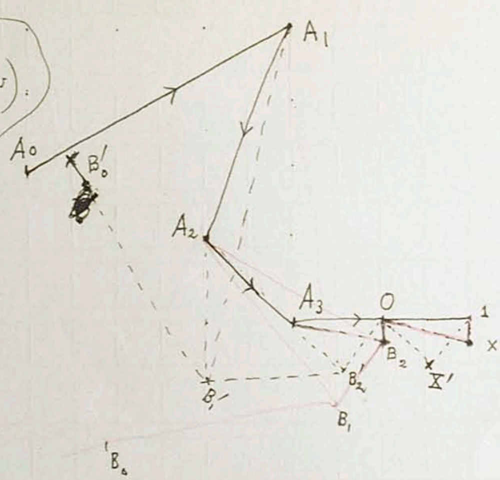
Ex. $x^3 + (1-i)x^2 - (1+3i)x + 3+2i = 0.$

$x = u+iv$

$(u^3 - 3uv^2 + u^2 - v^2 + 2uv - u + 3v + 3)$

$+ i(-v^3 + 2u^2v - u^2 + v^2 + 2uv - 3u - v + 2)$

$= 0$



一つの root の First approximat'n として

$$x_1 = 0.5 - 0.5i$$

を採る。Horner を用いて

(0.5 − 0.5i

1	1 − i	−1 − 3i	3 + 2i
		+0.75 − 0.75i	−0.5 − 2.25i
	0.5 − 0.5i	−0.75 − 0.75i	−2.25 + 0.5i
	1.5 − 1.5i	−1 − 4.5i	+0.25 + 0.25i = $f(x_1)$
	0.5 − 0.5i	+1 − 1 i	
	2 − 2i	−1 − 1 i	
	0.5 − 0.5i	−1 − 6.5i = $\frac{f'(x_1)}{1!}$	
	2.5 − 2.5i = $\frac{f''(x_1)}{2!}$		

$$\left|\frac{f(x_1) \cdot f''(x_1)}{[f'(x_1)]^2}\right|$$

$$= \left|\frac{(0.25+0.25i)(5-5i)}{(-1-6.5i)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{2.5}{[1-(6.5)^2]+13 i}\right| < 1.$$

$$h = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{0.25+0.25i}{1+6.5i} = \frac{(1+i)(4-26i)}{4^2+26^2} \fallingdotseq 0.04 - 0.03i$$

$$x_2 = (0.5 - 0.5i) + (0.04 - 0.03i) = 0.54 - 0.53i$$

$x_3 = 0.542 - 0.53\overset{1}{\cancel{3}}i$

$f(x_3) = 0.002 - 0.0006i$

$x_4 = 0.54195 - 0.5313i$

$f''(x) = 12x^2 - 30x + 30,$

$f''(\xi) = p(\xi)\cdot 12 + r_2(\xi),\quad f''(\xi) = r_2(\xi) = 22.83 - 132.16$

ゆえに $h = -0.26 + 0.17i.$

$$\left|\frac{f(\xi)\cdot f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2}\right| = \left|\frac{(1.193-21.95)(22.83-132.16)}{(9.23+37.9)^2}\right| = \left|\frac{(-19.33+3.33i)\cdot(364.4+63.4i)}{(-58.1-25.8i)^2}\right| < 1.$$

ゆえに complex root の second app. は

$$\xi = (2.2 + 2.8i) + (-0.26 + 0.17i) = 1.94 + 2.97i.$$

同様にして third app.

$$\xi = 2.00 + 3.00i$$

実際 $f(2+3i) = 0.$ $\quad 2-3i.$

~~Ex. $x^3 + (1-i)x^2 - (1+3i)x + 3 + 2i$~~

~~45 Dandelin, Lobatschevsky, Graeffe method~~
1826, 1834, 1837

Complex coefficients の場合.

$$x^3 + (1-i)x^2 - (1+3i)x + 3 + 2i = 0.\qquad x_1 = 0.56 - 0.52i$$

1	$1-i$	$-1-3i$	$3+2i$
	$0.56-0.52i$	$+0.874-0.881i$ $-0.790-0.851i$	$-0.513+0.476i$ $-2.424-2.613i$
	$1.56-1.52i$	$-0.916-4.662i$	$+0.063-0.135i = f(x_1)$
	$0.56-0.52i$	$+1.187-1.102i$ $-1.061-1.142i$	
	$2.32-2.04i$	$-0.790-6.906i = \frac{f'(x_1)}{1!}$	
	$0.56-0.52i$		
	$2.68-2.56i = \frac{f''(x_1)}{2!}$		

$(0.56-0.52i$

$$\left|\frac{f(x_1)\cdot f''(x_1)}{[f'(x_1)]^2}\right| = 0.023 < 1.$$

$$h = -\frac{(0.063-0.135i)}{-0.790-6.906i} = -0.0183 - 0.0112i$$

$$x_2 = 0.542 - 0.531i.\qquad f(x_2) = 0.002 - 0.000\ldots$$

同様にして

$$x_3 = 0.541\cancel{6}5 - 0.5313i$$

~~45 Dandelin, Lobatschevsky, Graeffe method~~
1826, 1834, 1837

~~real coeff. の alg. eq. の 全ての roots を求めるには.~~

System of equations.

$$f(x,y) = 0,$$
$$g(x,y) = 0,$$

これを求めれば graph の交り点.

first approximat' として (x_1, y_1) を得る.

$$f(x_1, y_1) = \varepsilon_1,\qquad g(x_1, y_1) = \varepsilon_2.$$

$x = x_1 + h,\quad y = y_1 + k,$

$$0 = f(x,y) = f(x_1,y_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_1,y_1}\cdot h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_1,y_1}\cdot k + \cdots$$

$$0 = g(x,y) = g(x_1,y_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_1,y_1}\cdot h + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_1,y_1}\cdot k + \cdots$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot k + \varepsilon_1 = 0\\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\cdot h + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\cdot k + \varepsilon_2 = 0\end{aligned}\right\}$$ これより h, k を求める (Newton).

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Successive approximat.

$$\begin{cases} x=\varphi(x,y) \\ y=\psi(x,y) \end{cases}$$

first app. x_1, y_1 と

$$\begin{cases} x_2=\varphi(x_1,y_1), \\ y_2=\psi(x_1,y_1) \end{cases}$$ とおく。

$$x-x_2=\varphi(x,y)-\varphi(x_1,y_1)=(x-x_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+(y-y_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$y-y_2=\psi(x,y)-\psi(x_1,y_1)=(x-x_1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+(y-y_1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

( ) は x と x_1 の間の x, y と y_1 との間の y.

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \leqq k<1, \\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| \leqq k<1. \end{cases}$$

$$|x-x_2|+|y-y_2| \leqq |x-x_1|k+|y-y_1|k \leqq k\left(|x-x_1|+|y-y_1|\right)$$

$$|x-x_{n+1}|+|y-y_{n+1}| \leqq k^n\left(|x-x_1|+|y-y_1|\right).$$

改良 実際は

$$x_2=\varphi(x_1,y_1),\quad y_2=\psi(x_2,y_1), \qquad x_3=\varphi(x_2,y_2),\quad y_3=\psi(x_3,y_2),$$

とする方がよい。

$\boxed{45}$ Dandelin, Lobachevsky, Graeffe method
1826, (Lobatschewsky) 1834, 1837

real coeff. の alg. eq.

I) まづ

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ の root の (i) absolute value が (ii) 皆 real なると 皆異なって 仮定 (上).

$|x_1|>|x_2|>|x_3|>\cdots>|x_n|$. $\left|\frac{x_k}{x_{k+1}}\right|>1$.

次に z を導入して $z_1=x_1^2$, $z_2=x_2^2$, $z_3=x_3^2$, $\ldots$ $z_n=x_n^2$ を root とする eq. を作り, $f_1(z)=0$. また u を導入して

$u_1=(x_1^2)^2$, $u_2=(x_2^2)^2$, $(x_3^2)^2$, $u_n=(x_n^2)^2$ $\quad f_2(u)=0$

$\ldots\ldots$

$x_1^{2^r}$, $x_2^{2^r}$, $x_3^{2^r}$, $x_n^{2^r}$ を root とする eq. $f_r(w)=0$ を作る。
$(=w_1)$ $(=w_2)$ $(=w_3)$ $(=w_n)$

$\left|\frac{w_k}{w_{k+1}}\right|=\left|\frac{x_k}{x_{k+1}}\right|^{2^r}$. $\left|\frac{x_k}{x_{k+1}}\right|>1$ なるから, r を十分大きく取れば;

$\doteqdot\infty$ ならしめることが出来る。

$$f_r(w)=p_nw^n+p_{n-1}w^{n-1}+\cdots+p_1w+p_0=0$$

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=-\frac{p_{n-1}}{p_n} \quad\rightarrow\quad w_1\doteqdot-\frac{p_{n-1}}{p_n}$$

$$w_1w_2+w_1w_3+w_2w_3+\cdots+w_{n-1}w_n=\frac{p_{n-2}}{p_n} \quad\rightarrow\quad w_1w_2\doteqdot\frac{p_{n-2}}{p_n}$$

$$w_1w_2w_3+\cdots=-\frac{p_{n-3}}{p_n} \quad\rightarrow\quad w_1w_2w_3=-\frac{p_{n-3}}{p_n},\ \ldots$$

w の方程式は次の separation によって

近似的に解が求められる。

$$\begin{cases} w_1 \doteqdot -\dfrac{p_{n-1}}{p_n} \\ w_2 \doteqdot \dfrac{p_{n-2}}{p_n} : \left(-\dfrac{p_{n-1}}{p_n}\right) = -\dfrac{p_{n-2}}{p_{n-1}} \\ w_3 \doteqdot -\dfrac{p_{n-3}}{p_{n-2}} \\ \vdots \\ w_n \doteqdot -\dfrac{p_0}{p_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} p_n w + p_{n-1} \doteqdot 0 \\ p_{n-1} w + p_{n-2} \doteqdot 0 \\ p_{n-2} w + p_{n-3} \doteqdot 0 \\ \vdots \\ p_1 w + p_0 \doteqdot 0 \end{cases}$$

$$\underline{p_n w^n + p_{n-1} w^{n-1}} + \underline{p_{n-2} w^{n-2}} + \cdots + p_1 w + p_0 = 0$$

従って その root を w_k とすれば：原方程式の根の絶対値は

$$|x_k| = |w_k|^{\frac{1}{2^r}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$f_1(z) = 0$ 即ち $(z - x_1^2)(z - x_2^2) \cdots (z - x_n^2) = 0$ を早く計算するには、

$$z = x^2 \quad \text{とおき}$$

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \cdots (x^2 - x_n^2) = 0$$

$$(-1)^n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$$\times (\overline{-x} - x_1)(\overline{-x} - x_2) \cdots (\overline{-x} - x_n) = 0 \qquad \text{即ち} \quad (-1)^n f(x) \cdot f(-x) = 0$$

これは奇数次の項を含まない。x を $-x$ にかえても invariant なる故

をもとめるがよい。 ついで $z = x^2$ とおけば $f_1(z) = 0$ が得られる。

実際は

	x^4	x^3	x^2	x	$\bullet$
	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	a_4	$-a_3$	$-a_2$	$+a_1$	$-a_0$
	a_4^2	$-a_3^2$	$-a_2^2$	$+a_1^2$	$-a_0^2$
double product をまちがえるな。		$+2a_2a_4$	$+2a_1a_3$	$-2a_0a_2$	
	b_4 (x^8, z^4)	b_3 (x^6, z^3)	b_2 (x^4, z^2)	b_1 (x^2, z)	b_0
以下繰返す	b_4	$-b_3$	$-b_2$	$+b_1$	$-b_0$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(-x) = 0 \end{cases}$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x - a_0$$
$$a_3^2x^6 - a_2^2x^4 + a_1^2x^2 - a_0^2$$
$$+ 2a_1a_3x^4 \quad - 2a_0a_2x^2$$

$f_1(z) = 0$

x^5 x^3 x の項は消える。

Ex. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$(x_1 = 3, \ x_2 = 2, \ x_3 = 1.)$

毎回 大きい数 を取扱うことになるから ／ それは

$$121 = 1.21 \times 10^2 \quad \text{を} \quad 1.21^2$$
$$6830 = 6.83 \times 10^3 \quad \text{を} \quad 6.83^3$$

数は 1位の数 にかく

$(a \cdot b^p$ は $\underline{\underline{p+1}}$ 位の数$)$

掛算は slide rule とか表を用いる。 四桁 しか正くないものと仮定しよう

大体 三桁または

x^3	x^2	x		冪
1	-6	$+11$	-6	
+	+	+	+	
1	-3.6^1	$+1.21^2$	-3.6^1	
	$+2.2$	-0.72		
1	-1.4^1	$+4.9^1$	-3.6^1	2
+	+	+	+	
1	-1.96^2	$+2.40^3$	-1.30^3	
	$+0.98$	-1.01		
1	-9.8^1	$+1.39^3$	-1.30^3	4
+	+	+	+	
1	-9.61^3	$+1.93^6$	-1.69^6	
	$+2.78$	-0.25		
1	-6.83^3	$+1.68^6$	-1.69^6	8
+	+	+	+	
1	-4.67^7	$+2.82^{12}$	-2.86^{12}	
	$+0.33$	-0.02		
1	-4.34^7	$+2.80^{12}$	-2.86^{12}	16
+	+	+	+	
1	-1.88^{15}	$+7.85^{24}$	-8.19^{24}	
	$+0.006$	$+0.0002$		
1	-1.874^{15}	$+7.85^{24}$	-8.19^{24}	32

$$\left(\begin{array}{l} 2.2 = 2.2^1 \\ 0.72 = 0.72^2 \end{array}\right)$$

$w = x^{32}$

$$1.\,w^3 - 1.874^{15}\,w^2 + 7.85^{24}\,w - 8.19^{24} = 0.$$

$$(w^3 \underbrace{-}_{A_2} w^2 + \underbrace{\ }_{A_1} w \underbrace{\ }_{-A_0}) = 0.$$

$$A_2 = w_1 = 1.874^{15} = |x_1|^{32}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = w_2 = \frac{7.85^{24}}{1.874^{15}} = |x_2|^{32}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = w_3 = \frac{8.19^{24}}{7.85^{24}} = |x_3|^{32}$$

對数	差	差$\times\frac{1}{32}$	真値
$\log 8.19^{24} = 24.9133$			
	0.0184	0.00057	$\lvert x_3 \rvert = 1.001$
$\log 7.85^{24} = 24.8949$			
	9.6222	0.3007	$\lvert x_2 \rvert = 1.998$
$\log 1.874^{15} = 15.2727$			
	15.2727	0.4773	$\lvert x_1 \rvert = 3.001$
$(\log 1 = 0)$			

どこまで計算をつづけるか？

$$-1.874^{15} \qquad +7.85^{24} \qquad -8.19^{24} \cdots \Big| \cdots 32$$

$$+ \qquad + \qquad +$$

$$-(1.874^{15})^2 \qquad +(7.85^{24})^2 \qquad -(8.19^{24})^2$$

$$+2\times 7.85^{24} \qquad -2\times 1.874^{15}\times 8.19^{24}$$

$$\cdots 64$$

double product は無関係。

$$(x^{64})^3 - A_2^2 (x^{64})^2 + A_1^2 (x^{64}) - A_0^2 = 0$$

$$|x_1|^{64} = A_2^2 \qquad |x_1|^{32} = A_1$$

$$|x_2|^{64} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \qquad |x_2|^{32} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$|x_3|^{64} = \frac{A_0^2}{A_1^2} \qquad |x_3|^{32} = \frac{A_0}{A_1}$$

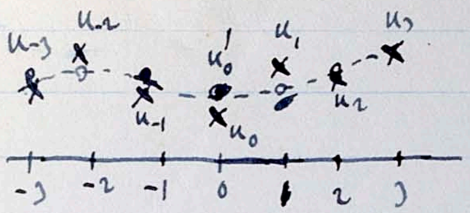
double product が影響しなくなるまで達したらば止める。

それ以上の approximation は Horner を用いる。

また x_1, x_2, x_3 の根の符号も Horner で定めるのが便利である。

<u>actuary</u> 1年10回[illegible]

graph,
moving average, etc.



$\Delta \qquad \Delta^2$

Difference

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x,$$
$$\Delta^2 u_x = \Delta(\Delta u_x) = u_{x+2} - 2u_{x+1} + u_x,$$
$$\Delta^3 u_x = u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x,$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\Delta^{p+1} x^p = 0. \quad \text{polynomial.}$$

$$\begin{array}{llll}
u_{-2} & & & \\
 & \Delta u_{-2} & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-2} & \\
 & \Delta u_{-1} & & \Delta^3 u_{-2} \\
u_0 & & \Delta^2 u_{-1} & \\
 & \Delta u_0 & & \Delta^3 u_{-1} \\
u_1 & & \Delta^2 u_0 & \\
 & \Delta u_1 & & \Delta^3 u_0 \\
u_2 & & \Delta^2 u_1 & \\
 & \Delta u_2 & & \Delta^3 u_1 \\
u_3 & & \Delta^2 u_2 &
\end{array}$$

Central-difference

$$\begin{array}{lllll}
u_{-2} & & & & \\
 & \delta u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \delta^2 u_{-1} & & \\
 & \delta u_{-\frac{1}{2}} & & \delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \delta^2 u_0 & & \delta^4 u_0 \\
 & \delta u_{\frac{1}{2}} & & \delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \delta^2 u_1 & & \\
 & \delta u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & &
\end{array}$$

Graduation, or the smoothing of data.

Landré Karup

1. Interpolation-formula ヲ基トスルモノデ, actuary ノ所謂 summation formula ト呼バルモノ. [Lidstone (1907)].

$$[n]\,u_0 = u_{-\frac{n-1}{2}} + \cdots + u_{-1} + u_0 + u_1 + \cdots + u_{\frac{n-1}{2}}$$

コレニ Stirling ノ interpolation formula ニヨリテ u_x ヲ $u_0, \delta u_0, \delta^2 u_0, \ldots$ デ表ハセバ

$$\frac{[n]}{n} u_0 = u_0 + \frac{n^2-1^2}{2^2 \cdot 3!}\delta^2 u_0 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2^4 \cdot 5!}\delta^4 u_0 + \cdots$$

[$= u_0'$ トオケバ moving average ノ方法トナル]

$$\frac{[p]}{p}\cdot\frac{[q]}{q}\cdot\frac{[r]}{r} u_0 = u_0 + \frac{\sum(p^2-1)}{24}\delta^2 u_0 + \text{terms in } \delta^4 u_0, \cdots$$

同様ニ $$\frac{[p]}{p}\frac{[q]}{q}\frac{[r]}{r}\left(\frac{\sum(p^2-1)}{24}\delta^2 u_0\right) = \frac{\sum(p^2-1)}{24}\delta^2 u_0 + \cdots$$

$u_0 = \div \{\ \} + \cdots$

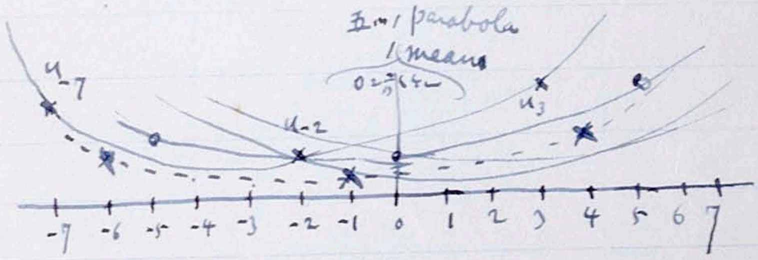
$$u_0' = \frac{[p][q][r]}{p\,q\,r}\left\{u_0 - \frac{\sum(p^2-1)}{24}\delta^2 u_0\right\}.$$

$$u_0' = \frac{[5]^3}{125}(-3u_{-1} + 7u_0 - 3u_1) = \frac{1}{125}\Big[25u_0 + 24(u_{-1}+u_1) + 21(u_{-2}+u_2) + 7(u_{-3}+u_3) + 3(u_{-4}+u_4) - 2(u_{-6}+u_6) - 3(u_{-7}+u_7)\Big]$$

$$= \frac{[5][5][5]}{5.5.5}(u_0 - 3\delta^2 u_0)$$

Woolhouse (1870)

13 terms



Woolhouse ノ original idea.

$$u_0' = \frac{[5][5][7]}{5.5.7}(u_0 - 4\delta^2 u_0)$$

21 term Spencer (1904)

[Manchester Unity Experience ノ mortality table]

2. Polynomial fitting (least square) [Sheppard, Cambridge Congress (1912) 1915.

u_0' ヲ ~~graduation~~ 求メルニ:

$(u_{-n}, u_{-n+1}, \cdots, u_0, \ldots u_n)$ points ヲ取リ

k th degree ノ parabola ヲ取リテ

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k$$

$$\sum_{p=-n}^{n}\left[u_p - u(p)\right]^2 = \text{Min}, \qquad u(0) = u_0' \text{ ト取ル.}$$

例ヘバ三次ノ parabola ニ於テ $n=5$ ト置ケバ.

$$u_0' = \frac{1}{429}\Big[89u_0 + 84(u_{-1}+u_1) + 69(u_{-2}+u_2) + 44(u_{-3}+u_3) + 9(u_{-4}+u_4) - 36(u_{-5}+u_5)\Big].$$

彼ハ $k=5$, $n=10$ マデノ表ヲ作レリ

Sheriff ノ test (1920, Edinburgh, R. Proc).

$$f(x) = \frac{10^7}{x} - 39999.95$$

x	f(x)	四捨五入 u	$u'_{(l)}$ (least square, $k=2$, $n=10$)	$u'_{(s)}$ (Spencer)	$(f-u)^2$	$(f-u'_{(l)})^2$	$(f-u'_{(s)})^2$
201	9751.29	9751					
202	9505.00	9505					
...	...	...					
...	...	...					
210	...	...					
211	7393.41	7393	7393.36	7393.29	.1681	0.0025	0.0144
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
233	2918.50	2919	2918.47	2918.41	.2500	0.0009	0.0081
234	...	...					
...	...	...					
...	...	...					
243	...	...					
				Sum	1.9471	0.0873	0.1327

2'. least square method ヲ少シ変化セシメシニ, method of interlaced parabola ナルモノガアル。 [Todhunter (1922)]

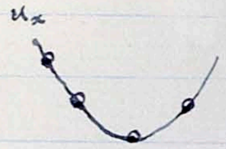
$$\sum_x \left[u_x - (a+bx+cx^2+dx^3)\right]^2 = \min.$$

with the condition $\begin{cases} u'_{-1} = a-b+c-d \\ u'_1 = a+b+c+d. \end{cases}$

polynomial ハ $-n \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad n$ ノ点デハ $u_{-n} \quad u_{-2} \quad u_0 \quad u_2 \quad u_n$ ニ出来ルダケ近ク, 而モ -1, $+1$ ニ於テハ precisely ニ u'_{-1}, u'_1 ニ等シク,

ニナル様 $x=0$ ニ於テ polynomial ノ値ヲ u'_0 トスル。

コノ方法ハ(実際)計算ガ非常ニ面倒ナレドモ, actuarial data ニ適シテヰル。



On a new method of graduation.

E. T. Whittaker,

(Proc. Edinburgh Math. Soc. Vol. 41 (1922-23), p. 63]

§ 1. Basis of the method in the theory of probability.

u_x ($x = 1, 2, \ldots, n$. given) n個ノ value $u_1, u_2, \ldots u_n$ data.

smooth ノ意味. $\Delta^3 u_x = u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x$ very small

(相接続スル四点ハ略ボ同ジ parabola ニ在ル)

Hypothesis I. u_1 ノ true value ハ u_1' ト $u_1' + \sigma$ トノ間ニアル. (σ ハ small constant)

u_2 〃 u_2' $u_2' + \sigma$

$\ldots$ $\ldots$ $\ldots$

u_n u_n' $u_n' + \sigma$

Smoothness ノ degree ヲ表ハスニハ S ノ値ヲ以テスル.

$$S = (u_4' - 3u_3' + 3u_2' - u_1')^2 + (u_5' - 3u_4' + 3u_3' - u_2')^2 + \cdots + (u_n' - 3u_{n-1}' + 3u_{n-2}' - u_{n-3}')^2$$

($\Delta^3 u_x$ ノ square ノ sum.)

只今ノ hypothesis ガ成立ツ為ノ probality $= Ce^{-\lambda^2 S}\sigma^n$ ト suppose スル. (C, λ ハ const.)

コレハ normal law of frequency ノ analogy デアル ?

次ニ上ノ hypothesis ハ成立ツトノ assumption ノ下ニ, first observed quantity ノ true value ガ u_1 ト $u_1 + \sigma$ トノ間ニアル probabity ハ

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 (u_1 - u_1')^2} \sigma$$

h_1 ハ measure of precision of this observation.

$$\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 (u_2 - u_2')^2} \sigma.$$

$\cdots\cdots$

$$\frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-F} \sigma^n \qquad F = h_1^2 (u_1 - u_1')^2 + \cdots + h_n^2 (u_n - u_n')^2.$$

S ハ smoothness ノ程度ヲハカリ, F ハ fidelity ノ程度ヲハカル.

κ 番目ノ hypothesis ノ prob. $= p_\kappa$.

ソノ hypothesis ノ上デ observed phenomena ノ prob. $= P_\kappa$.

$$\text{prob.} = \frac{p_\kappa P_\kappa}{\sum p_\kappa P_\kappa}$$

all hypothesis

サテ phenomena ガ observe サレル以前ニ, most probable hypothesis ハ $p_\kappa = \max$.

phenomena ガ observe サレタ以後ニ, most probable hypothesis ハ $p_\kappa P_\kappa = \max$.

故ニ吾々ノ場合ニ most probable hypothesisハ

$$\frac{c\, h_1 h_2 \cdots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-\lambda^2 S - F} \cdot \sigma^{2n} = \max.$$

由テ $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ ガ most probable ナル為ニハ

$$\lambda^2 S + F = \min.$$

§2. analytic formulation

簡単ノ為メニ $h_1^2 = h_2^2 = \cdots = h_n^2 \ (= \varepsilon \lambda^2)$ トオキ,

Conditionハ

$$\left[(u_4' - 3u_3' + 3u_2' - u_1')^2 + \cdots + (u_n' - 3u_{n-1}' + 3u_{n-2}' - u_{n-3}')^2\right] + \varepsilon\left[(u_1 - u_1')^2 + \cdots + (u_n - u_n')^2\right] = \mathrm{Min}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\varepsilon u_1 = \varepsilon u_1' - \Delta^3 u_1' \\
\varepsilon u_2 = \varepsilon u_2' + 3\Delta^3 u_1' - \Delta^3 u_2' \\
\varepsilon u_3 = \varepsilon u_3' - 3\Delta^3 u_1' + 3\Delta^3 u_2' - \Delta^3 u_3'
\end{array}\right] 3 \\
\varepsilon u_4 = \varepsilon u_4' + (\Delta^3 u_1' - 3\Delta^3 u_2' + 3\Delta^3 u_3' - \Delta^3 u_4') \\
\varepsilon u_x = \varepsilon u_x' + (\Delta^3 u_{x-3}' - 3\Delta^3 u_{x-2}' + 3\Delta^3 u_{x-1}' - \Delta^3 u_x') \\
\left.\begin{array}{l}
\\
\varepsilon u_n = \varepsilon u_n' + \Delta^3 u_{n-3}'
\end{array}\right] 3
\end{array}\right. \qquad \boxed{(1)}$$

$$\varepsilon u_x = \varepsilon u_x' - \Delta^6 u_{x-3}'$$

(uniquely ニ定マル)

今 新シキ quantity u_0' ヲ $\Delta^3 u_0' = 0$ ナル様ニ 導入シ 取レバ, 第三式ハ

$$\varepsilon u_3 = \varepsilon u_3' - \Delta^6 u_0' \quad \left[= \varepsilon u_3' + (\Delta^3 u_0' - 3\Delta^3 u_1' + 3\Delta^3 u_2' - \Delta^3 u_3')\right]$$

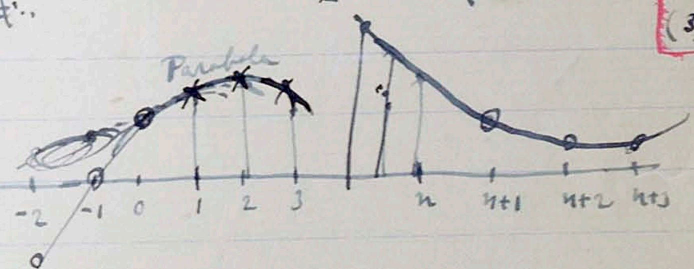
同様ニ u_{-1}' ヲ $\Delta^3 u_{-1}' = 0$ ナル様ニ導入シ, 第二式ハ $\varepsilon u_2 = \varepsilon u_2' - \Delta^6 u_{-1}' \left[= \varepsilon u_2' + (\Delta^3 u_{-1}' - 3\Delta^3 u_0' + 3\Delta^3 u_1' - \Delta^3 \ldots\right.$

u_{-2}' $\quad \Delta^3 u_{-2}' = 0$ $\qquad \boxed{(3)}$

更ニ u_{n+1}' ヲ $\Delta^3 u_{n-2}' = 0$ ナル様

u_{n+2}' $\quad \Delta^3 u_{n-1}' = 0$

u_{n+3}' $\quad \Delta^3 u_n' = 0$



一般ニ u_x' ハ linear difference eq.

$$\varepsilon u_x' - \Delta^6 u_{x-3}' = \varepsilon u_x \qquad \boxed{(2)}$$

(6 initial condition ヲ持ツ). ノ particular solution デアル.

ソノ conditionハ 次ノ如ク書キ得ル.

$$\left\{\begin{array}{lll}
\Delta^4 u_{-2}' = 0, & \Delta^4 u_{-1}' = 0, & \Delta^5 u_{-2}' = 0 \\
\Delta^4 u_{n-2}' = 0, & \Delta^4 u_{n-1}' = 0, & \Delta^5 u_{n-2}' = 0.
\end{array}\right\} \boxed{(4)}$$

何トナレバ

$$\Delta^4 u_x' = \Delta^3 u_{x+1}' - \Delta^3 u_x'.$$

$$\Delta^5 u_x' = \Delta^3 u_{x+2}' - 2\Delta^3 u_{x+1}' + \Delta^3 u_x'.$$

$u'_{x,0}$ ハ $\varepsilon=0$ ナルトキノ u'_x ノ値デアル。故ニ (1) ヨリ $\Delta^3 u'_{x,0}=0$.
xノ如何ニ係ラズ

故ニ $$u'_{x,0}=a+bx+cx^2. \quad (10)$$

今 (8) ヲ (5), (6), (7) ニ代入スレバ:

$$\begin{cases} \sum_1^n (u'_{x,0}+\varepsilon u'_{x,1}) = \sum_1^n u_x \\ \sum x(u'_{x,0}+\varepsilon u'_{x,1}) = \sum x u_x \\ \sum x^2(u'_{x,0}+\varepsilon u'_{x,1}) = \sum x^2 u_x \end{cases}$$

故ニ

$$\boxed{(11)} \begin{cases} \sum u'_{x,0} = \sum u_x \\ \sum x u'_{x,0} = \sum x u_x \\ \sum x^2 u'_{x,0} = \sum x^2 u_x \end{cases} \qquad \boxed{(12)} \begin{cases} \sum u'_{x,1} = 0 \\ \sum x u'_{x,1} = 0 \\ \sum x^2 u'_{x,1} = 0 \end{cases}$$

ト選ブコトニスル。

(10)ト(11)ヨリ 三元一次方程式ニヨリテ a, b, c ハ定マル。

II. difference eq. (9) ノ solution.

先ヅ (9) カラ $\Delta^6 u'_{x-3,1}$ ハ与ヘラレル。

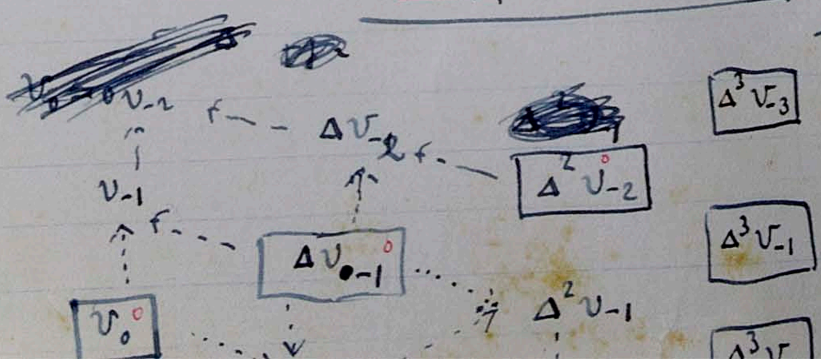
故ニ今 $\Delta^3 u'_{x,1}=v_x$ $\boxed{(13)}$ トオケバ、$\Delta^3 v_x \left(=\Delta^3(\Delta^3 u'_{x,1}) = \Delta^6 u'_{x,1}\right)$ ハ知レテイル。

然ルニ (3), (4) カラ

$$0=\Delta^5 u'_{-2} = \Delta^5 u'_{-2,0}+\varepsilon\cdot\Delta^5 u'_{-2,1} \qquad (\Delta^3 u'_{-2,0}=0)$$

$$=0+\varepsilon\cdot\Delta^2 v_{-2} \qquad \Delta^3 u'_{x,0}=0 \text{ ナルガ故}$$

同様ニシテ ∴ $\Delta^2 v_{-2}=0$,
$\Delta v_{-1}=0$, $v_0=0$.



故ニ difference table ノ summation ノミニヨリテ 総テノ v_x ハ決定サレル

$$= (\Delta^5 u'_{-1} - \Delta^5 u'_{-2}) + (\Delta^5 u'_0 - \Delta^5 u'_{-1}) + (\Delta^5 u'_1 - \Delta^5 u'_0) + \cdots + (\Delta^5 u'_{n-2} - \Delta^5 u'_{n-3})$$

§3. Conservation of moments.

(2) ヲ加ヘルト

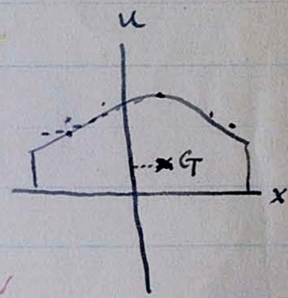
$$\Sigma(u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n) - \Sigma(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \Delta^6 u'_{-2} + \Delta^6 u'_{-1} + \cdots + \Delta^6 u'_{n-3}$$
$$= \Delta^5 u'_{n-2} - \Delta^5 u'_{-2}$$
$$= 0 \qquad (4) \text{ ニヨル}$$

0th moment ハ $\sum_1^n u'_k = \Sigma u_k$. $\boxed{(5)}$ 故ニ面積相等シ.

次ニ (2) カラ

$$\Sigma(u'_1 + 2u'_2 + \cdots + n u'_n) - \Sigma(u_1 + 2u_2 + \cdots + n u_n) = 0. \qquad \boxed{(6)}$$

first moment 故ニ centre of gravity ガ同ジ x-coordinate ヲ有スル.



second $u'_1 + 2^2 u'_2 + 3^2 u'_3 + \cdots = u_1 + 2^2 u_2 + \cdots$ $\boxed{(7)}$ u axis ノ周リニ same moment of inertia

§4. ~~Numerical process.~~ Solution of our problem.

Parameter ε ハ任意ナリ. ε ガ完全ニ 0 ナラバ, perfectly smooth curve ヲ得ル. [(1) カラ $\Delta^3 u_x = 0$ x ノ如何ニ係ラズ] 故ニ. 然レドモ一方カラ言ヘバ observed data ニ fit シナイ欠点ガアル.

由テ ε ヲ相当小サイモノト見做シテ, (ε² 以下ハ捨テル).

$$u'_x = u'_{x,0} + \varepsilon u'_{x,1} \qquad \boxed{(8)}$$

之ヲ (2) ニ代入シテ ε ノ coef. ヲ等シトオケバ;

$$\boxed{u'_{x,0} - \Delta^6 u'_{x-3,1} = u_x} \qquad \boxed{(9)}$$

若シ $u'_{x,0}$ ガ見出サレルナラバ; コノ (9) ヲ解イテ $u'_{x,1}$ ガ求メラレル. (difference equation)

I. $\boxed{u'_{x,0} \text{ ヲ見出ス方法.}}$

$u'_{x,0}$ ハ $\varepsilon = 0$ ナルトキノ u'_x ノ値デアル. 故ニ (1) ヨリ $\Delta^3 u'_{x,0} = 0$. x ノ如何ニ係ラズ

故ニ $$u'_{x,0} = a + bx + cx^2. \qquad (10)$$

今 (8) ヲ (5), (6), (7) ニ代入スレバ

$$\begin{cases} \sum_1^n (u'_{x,0} + \varepsilon u'_{x,1}) = \sum_1^n u_x \\ \Sigma x (u'_{x,0} + \varepsilon u'_{x,1}) = \Sigma x u_x \\ \Sigma x^2 (u'_{x,0} + \varepsilon u'_{x,1}) = \Sigma x^2 u_x \end{cases}$$

故ニ

$$\boxed{(11)} \begin{cases} \Sigma u'_{x,0} = \Sigma u_x \\ \Sigma x u'_{x,0} = \Sigma x u_x \\ \Sigma x^2 u'_{x,0} = \Sigma x^2 u_x \end{cases} \qquad \boxed{(12)} \begin{cases} \Sigma u'_{x,1} = 0 \\ \Sigma x u'_{x,1} = 0 \\ \Sigma x^2 u'_{x,1} = 0 \end{cases}$$

(10)ト(11)ニヨリ三元一次方程式ニヨテ a, b, c ハ定マル.

II. difference eq. (9) ノ solution.

先ヅ (9) カラ $\Delta^6 u'_{x-3,1}$ ハ与ヘラレル.

故ニ今 $\Delta^3 u'_{x,1} = v_x$ (13) トオケバ、 $\Delta^3 v_x \left(= \Delta^3 (\Delta^3 u'_{x,1})\right) = \Delta^6 u'_{x,1}$ ハ知ラレル.

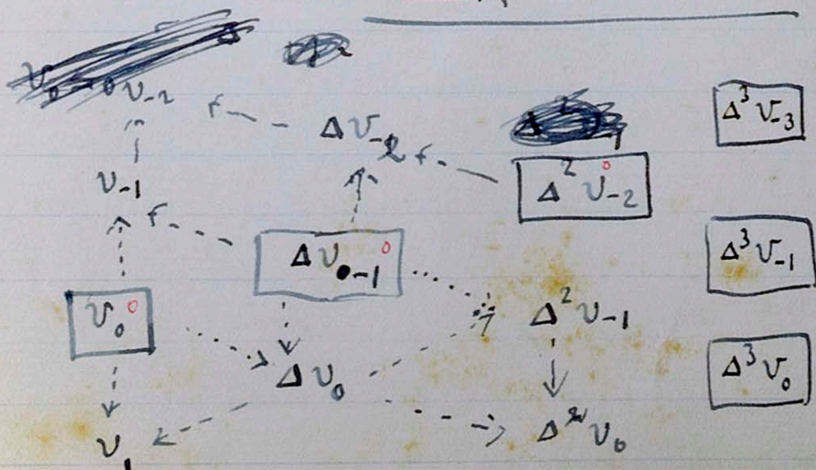
シカルニ (3), (4) カラ

$$0 = \Delta^5 u'_{-2} = \Delta^5 u'_{-2,0} + \varepsilon \cdot \Delta^5 u'_{-2,1} \qquad (\Delta^3 u'_{-2,0} = 0)$$

$$= 0 + \varepsilon \cdot \Delta^2 v_{-2} \qquad \Delta^3 u'_{x,0} = 0 \text{ ナルニ}$$

同様ニシテ ∴ $\Delta^2 v_{-2} = 0$,

$\Delta v_{-1} = 0$, $v_0 = 0$.



故ニ difference table ノ summation ノミニヨリテ総テノ v_x ハ決定サレル.

次ニ $v_1, v_2, \ldots, v_{n-3}$ ノ値カラ,

$u'_{x,1}$ 即チ $u'_{1,1}$ $u'_{2,1}$ … $u'_{n,1}$ ヲ求メネバナラナイ.

ソレガ為ニハ

$u'_{x,1}$ ハ

difference eq. $\Delta^3 u'_{x,1} = v_x$ $\boxed{(13)}$

ヲ満足スル. (12) 即チ $\Sigma u'_{x,1}=0$, $\Sigma x u'_{x,1}=0$, $\Sigma x^2 u'_{x,1}=0$

ヲ満足セザルベカラズ.

	Δ	Δ^2	Δ^3
$w_1 (= \boxed{R})$			
	$\boxed{Q}$		$\boxed{v_0}$
$w_2 (= w_1+Q)$		$\boxed{P}$	
	$Q+P$		$\boxed{v_1}$
$w_3 = (w_2+Q+P)$		$P+v_1$	
	$(Q+P)+(P+v_1)$		$\boxed{v_2}$
w_4		$P+v_1+v_2$	
			$\boxed{v_3}$

$P, Q, R (= w_1)$ ヲ任意ニ取レバ, summation ノミニヨリテ

$w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$

ヲ得ル. コレハ明カニ (13) ノ solution ナレドモ, 求ムル所ノ particular solut. デハ ナイ.

$\Delta^3 w_x = v_x$. 併セシト w_x トノ差 y_x ハ quadratic ナリ,

$\because \Delta^3 (u'_{x,1} - w_x) = 0$ 何トナレバ $\Delta^3 y_x = 0$.

$$u'_{x,1} = w_x - A - Bx - Cx^2 \qquad (14)$$

コレヲ (12) ニ代入スレバ:

A, B, C ハ 三ツノ一次方程式ヲ解イテ定マル. 故ニ $u'_{x,1}$ ハ 求メラレル.

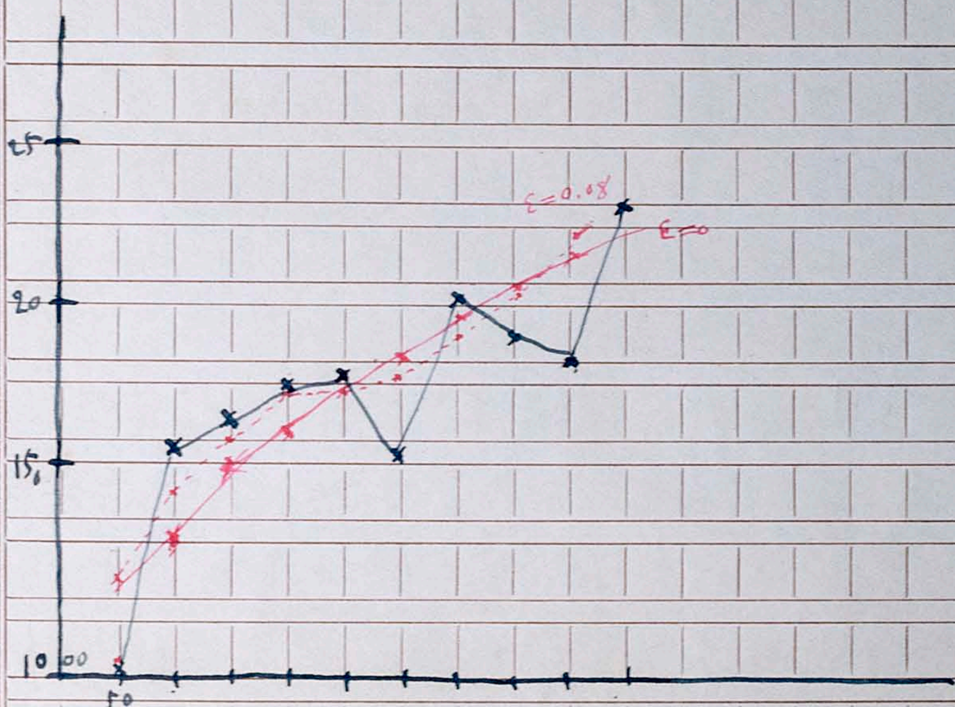
従テ (8) 即チ $u'_x = u'_{x,0} + \varepsilon u'_{x,1}$

カラ u'_x ヲ得ル.

ε ハ 最后マデ 一定セズニ置ク. (中途ノ 計算ニ ε ヲ用ヒル必要ナシ) ε ヲ小サクスレバ 益々 smooth トナリ, ε ヲ大キクスレバ data ニ fidel ニナル.

§ advantage of this method.

1. ε ヲ 自由ニモオケルコト.
2. logical base ニ立ツコト.
3. moments ノ conservation (コレハ保険ヤ統計ノ最モ重要ナル性質. Woolhouse ヤ Spencer ハ此ノ性質ヲ欠ク.)
4. table ニアル whole material ヲ用ヒルコト. (~~Spencer~~ 従来ナドハ 附近ノモノシカ用ヒズ.)
5. sequence ノ上下ニモ困難ナシ. ヲ graduate スル (~~Spencer~~ 従来 ハ 上下ハ 出来ズ.)
6. 計算ニ困難ノ点ナシ. 加減算 (一次方程式 マデ 乗ヤ算ト三ツ)



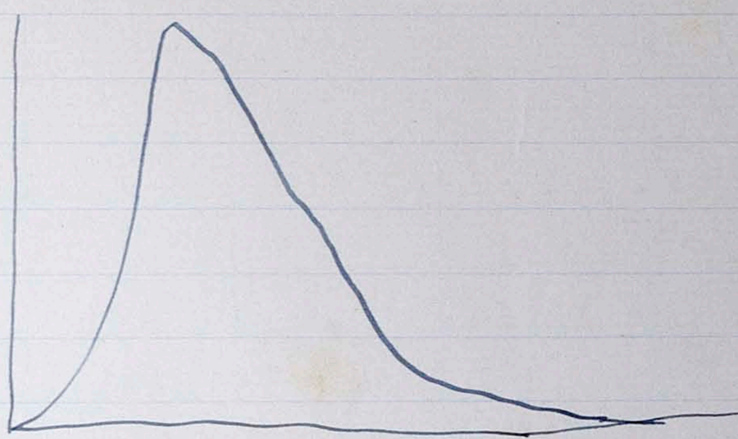
原稿用紙

第二. 非對称形.

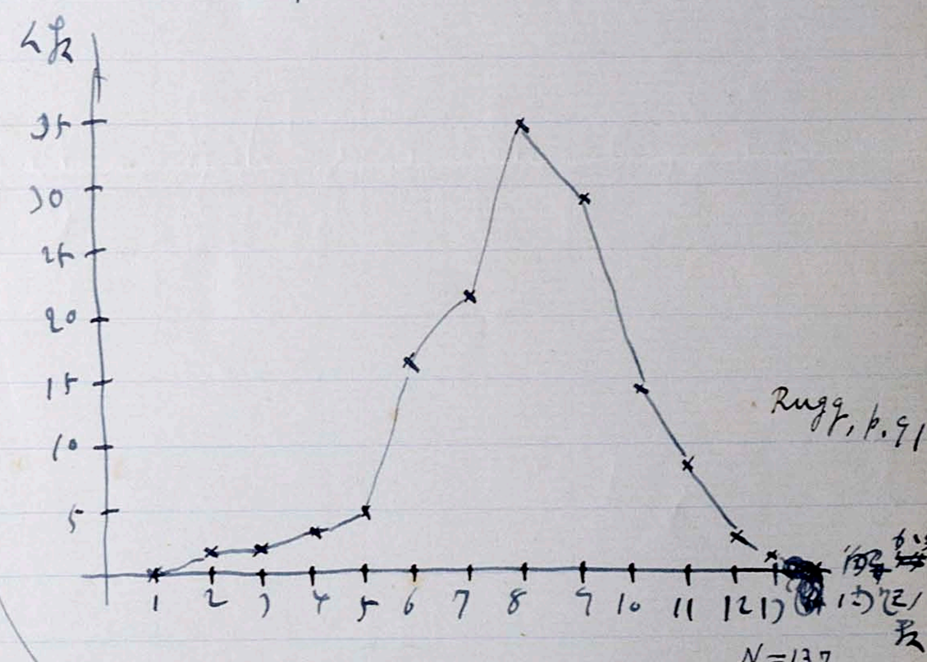
コレハ度数ノ極大ヲ有スルモ、ソノ位置ガ左又ハ右ニ偏ル場合デアッテ、最モ普通ニ見ラレル形デアル.

例1. 英国ノ成人(男子)ノ体重

体重(ポンド)	人数
90-100	2
100-110	34
110-120	152
120-	390
130	867
140	1623
150	1559
160	1326
170	787
180	476
190	263
200	107
210	85
220	41
230	16
240	11
250	8
260	1
270	0
280-290	1
	7749



~~練習~~問題. ~~神経~~代表 問題ヲ解かした数.



問題 クルミ

数学

紅豆

第二章　平均値及ビ散布度

第一節　平均値

6.　一ツノ物ノ集リガ種々ノ階級ニ分布サレルトキ、コレ等ノ全階級ノ中心トナリ　代表トモナルベキ数ヲ求メル必要ガ起ル。ソノ数ヲ平均値ト称スル。

平均値トシテ採用サレルモノハ、次ノ三ツデアル。

(1) 算術平均、　(2) モード　(3) メディアン

I. 算術平均

算術平均ノ意味ハ諸君ガ既ニ算術ニ於テ学ンダ所デアル。今例ヘバ28人ガ次表ノ様ニ金ヲ所持シテ居ルトキ、ソノ算術平均ヲ求メヤウ。

ソレニハ各々ノ人ガ有スル金額ノ合計ヲ人数28デ割レバヨイ。即チ

金額(円)	人数
5	4
10	10
15	8
20	4
25	2
	28

$$M=\frac{5^{円}\times4+10^{円}\times10+15^{円}\times8+20^{円}\times4+25^{円}\times2}{28}$$

$$=\frac{370^{円}}{28}=13^{円}21^{銭}\cdots$$

一般ニ度数分布表ガ

階級(X)	X_1	X_2	X_3 ……	X_n
度数(f)	f_1	f_2	f_3 …	f_n

ナルトキハ、算術平均Mハ

$$M=\frac{X_1f_1+X_2f_2+X_3f_3+\cdots+X_nf_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}$$

ニヨッテ与ヘラレル。コレヲ略シテ

$$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_kf_k)}{\sum_{k=1}^{n}f_k}\quad\frac{\sum_k(X_kf_k)}{\sum_k f_k}\quad\frac{\sum(Xf)}{\sum f}$$

ト書イテモヨイ。　又　$\sum f$ ハ度数ノ総和デアルカラ、全体ノ物ノ数ニ等シイ、之ヲNトスレバ

$$\sum_k f_k=N.$$

何故ニ平均偏差Aノ計算デハ、$X_1, X_2 \cdots$ノ平均（即チ中心）トシテ「メヂアン」ヲ採用スルカ、何故ニ算術平均ヲ採用セナイノカ ニ就テノ理由ハ、後ニ證スル所アラウト思フ。

13. 平均偏差ト相並ンデ今一ツ描ク分布ヲ比較スルニ常用セラルル量ガアル。ソレハ標準偏差デアル。 Standard deviation

分布表

X	X_1	X_2	X_k	X_n
f	f_1	f_2	f_k	f_n

コノ時、各値 $X_1, X_2, \cdots X_n$ ト其ノ算術平均 M ……差ヲ、ソノ階級ノ偏差 ξ_k ト呼ブコトニスル。即チ

$$\xi_1 = M - X_1,\ \xi_2 = M - X_2 \cdots,\ \xi_k = M - X_k, \cdots, \xi_n = M - X_n.$$

今全体ノ数ヲ $N (= f_1 + f_2 + \cdots + f_k + f_n = \Sigma f)$ トセバ；標準偏差 σ トハ

$$\sqrt{\frac{1}{N}\left(f_1\xi_1^2 + f_2\xi_2^2 + \cdots + f_k\xi_k^2 + \cdots + f_n\xi_n^2\right)}$$

ノコトデアル。即チ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_k (f_k \xi_k^2)}.$$

由テ σ ハ 各偏差 $\xi_1^2, \xi_2^2, \cdots \xi_n^2$ ノ平方ノ算術平均ノ平方根ニ外ナラヌ。

Barlow, Table

例ヘバ

X_k	f_k	ξ_k	ξ_k^2	$f_k\xi_k^2$
8	2	−3	9	18
9	4	−2	4	16
10	6	−1	1	6
11	9	0	0	0
12	6	1	1	6
13	4	2	4	16
14	2	3	9	18
計	33			80

$N = 33$, $\Sigma f_k X_k = 363$

$M = 11$

$$\sigma = \sqrt{\frac{80}{33}} = \sqrt{2.4242} = 1.56$$

345.3
499) 172302
1497
2260
1996
2642
2495

16

Wahrscheinliche Fehler (probable error)

P.E ノ	M	$0.67449\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$	
〃	σ	$0.67449\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{2N}}$	
〃	r	$0.67449\,\dfrac{1-r^2}{\sqrt{N}}$	コレヲ特ニ信用度トイフ
〃	η	$0.67449\,\dfrac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}$	

コレ等ハ皆或ル假定ノ下デ計算セルモノデアル。

r ガ 4 P.E ヨリ小ナラバ信用ナキモノナリ。

3倍(或ハ 4倍)

Nガ余リ大ナラザルトキハ P.E ヲ計算セザルベカラズ。

例、11-12歳ノ男生徒 86名。 (10個ノ数字ヲ色々ニ加ヘサセル)

10分間ニ加フル数字ノ数

加法ノ正確度	100-140	140-180	180-220	220-260	260-300	300-340	340-380	380-420
50-110		3	0.5	0.5	1		1	
~~110-140~~ 110-125	1	1	1	1				
125-140		2	0.5	0.5				
140-155	0.5	2.5	1	1.5	1.5	2		
155-170		3	2	4	5	3	1	
170-185	1	4.5	4.5	5.5	5.5	3	0.5	
185-200	1	2.5	5	5	2.5	2.5	0.5	

$r = 0{,}14 \pm 0{,}07$

$\eta_{(xy)} = 0{,}35 \pm 0{,}06$ 信用ナキ数

$\eta_{(yx)} = 0{,}29 \pm 0{,}07$

III. 次ニ 回帰~~曲~~曲線ガ共ニ直線ノ場合ニハ，

~~相関~~ 等シイ値ヲ取ルコトニナルガ，~~其ノ一...~~ 何トナレバ

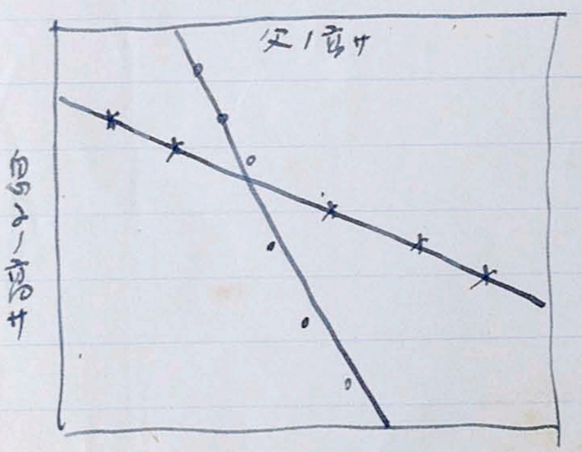
回帰曲線ガ共ニ直線ナル場合ニハ，二ツノ回帰曲線ハ夫々二ツノ最小偏差線ト一致スル。従テ M_1 ト A_1, M_2 ト A_2, …, M_1' ト A_1', … トハ夫々一致スル，故ニ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_1', \delta_2', \dots$ ハ皆零トナリ，従テ $\delta_{(x)}=0$, $\delta_{(y)}=0$. 由テ（ ）カラ $r=\eta_{(x,y)}=\eta_{(y,x)}$ ヲ得ル。

逆ニ，相関係数ト二ツノ相関比トガ互ニ等シイトキハ，回帰曲線ガ共ニ直線トナル。

何トナレバ，$r=\eta_{(x,y)}$, $r=\eta_{(y,x)}$ ト（ ）トカラ，$\delta_{(x)}=0$, $\delta_{(y)}=0$ ヲ得ルカラデアル。

ソレ故ニ，二ツノ回帰曲線ヲ画イテ見テ，ソレガ共ニ直線デアルカ，又ハ直線ニ近イ場合ニハ，r, $\eta_{(x,y)}$, $\eta_{(y,x)}$ ノ中数ノ一ツヲ計算スレバ，実際問題ニハソレデ充分デアル。

例ヘバ，父ト息子トノ背ノ高サノ相関ヲ求~~メ~~テ見ルト，



$r=+0.51$

$\eta_{(x,y)}=0.5\cancel{1}2$

$\eta_{(y,x)}=0.52$

.2704
.2601
0.01

0.1

コノ三ツノ値ガ殆ド等シイコトハ，回帰曲線ガ殆ド直線的デアルコトヲ意味シテ居ル。

回帰曲線ガ直線ト大ニ異ルトキニハ，ηトrトノ値ハ~~余~~余程異ッテ来ル，例ヘバ Brownハ 11-12歳ノ子供ニ 0, 1, 2, …, 9 マデノ一桁ノ数ノ寄セ算ヲ行ハセタ，五分間ヅツ二回行ッタ結果ハ